Modelo Educación para la Vida y el Trabajo

Matemáticas

1a Edición

Lecturas de matemáticas

Operaciones **avanzadas**

Revista

DIRECTORIO
Mtro. Aurelio Nuño Mayer
Secretario de Educación Pública

Lic. Mauricio López Velázquez
Director General del INEA

Créditos de la presente edición

Coordinación general
Celia del Socorro Solís Sánchez

Coordinación académica
María Esther Amador Gómez

Autoría
María Esther Amador Gómez

Revisión académica
Rosa Elvira Páez Murillo
María de Lourdes Aravedo Reséndiz

Coordinación gráfica y cuidado de la edición
Greta Sánchez Muñoz
Adriana Barraza Hernández

Seguimiento editorial
María del Carmen Cano Aguilar

Revisión editorial
Gabriel Nieblas Sánchez
Hugo Fernández Alonso

Diseño e ilustración de portada
Ricardo Figueroa Cisneros

Diagramación
Jesús García Morales

Ilustración de interiores
María Isabel Gómez Guízar

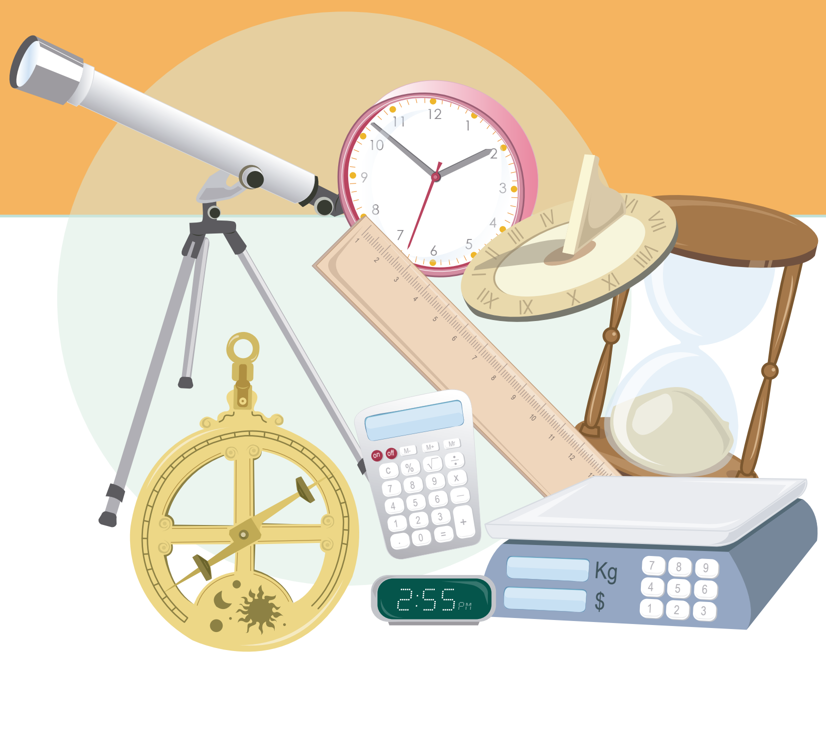
Fotografía
Greta Sánchez Muñoz

Operaciones avanzadas, Revista *Lecturas de matemáticas*. D. R. 2007 ©Instituto Nacional para la Educación de los Adultos, INEA. Francisco Márquez 160, Col. Condesa, Ciudad de México, C. P. 06140. Actualización 2017

ISBN *Modelo Educación para la Vida y el Trabajo.* Obra completa: 970-23-0274-9
ISBN *Operaciones avanzadas.* Revista *Lecturas de matemáticas*: 970-23-0702-3

Impreso en México

Índice



Presentación

Estimada persona joven o adulta, esta revista contiene lecturas acerca de la historia de las matemáticas y sus aplicaciones.

Después de leer su revista, usted tendrá la oportunidad de reflexionar sobre las ideas principales, ya que en el Libro del adulto encontrará preguntas sobre el contenido de cada texto.

Recomendaciones generales

- Lea pausadamente para comprender las ideas de la lectura.
- Si desconoce el significado de alguna palabra, consúltelo en un diccionario.
- Reflexione sobre lo que lee; si es necesario, suspenda su lectura por un breve tiempo. Pregúntese, ¿de qué trata lo que he leído? Si puede contestar esta pregunta, continúe leyendo.
- En su Libro del adulto conteste las preguntas que se relacionan con el contenido de cada lectura.
- Si es posible, comente con sus compañeros, asesor o asesora de qué trata la lectura y qué relación tiene con lo que ha estudiado en el módulo *Operaciones avanzadas*.

Recuerde

Consultar con su asesor o asesora si tiene alguna duda sobre los artículos de su revista.

"Nuestra vida cotidiana está impregnada por el pensamiento matemático que se extiende por todo lo que nos rodea, tan pronto de manera trivial, tan pronto insospechadamente complejo, y que huye de nuestras miradas demasiado acostumbradas a verlo para notar su presencia."

Michel Luntz

Números, números y más números

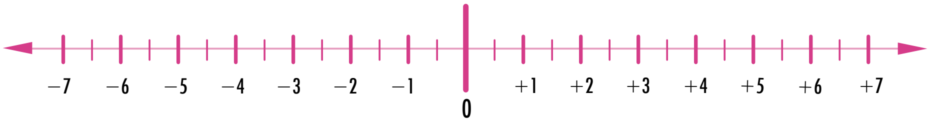
Por muy difícil que parezca, los números tienen una historia. Los primeros números, llamados naturales, surgieron por la necesidad de contar y de saber cuántos objetos había en un grupo.

Los números naturales, también llamados cardinales (1, 2, 3, 4...), son los más sencillos y son aplicables a las sumas de cantidades enteras, como personas y animales, en donde se obtienen nuevamente cantidades enteras. Otra operación en la que también es posible sumar cantidades enteras y obtener enteros es la multiplicación. Pero cuidado con la división, pues mientras que 10 dividido entre 2 es igual a 5, vemos que 2 dividido entre 10 es igual a $\frac{1}{5}$. Así surge la fracción como una necesidad de dar solución a un problema y representarlo, es decir, escribirlo, para que otros puedan leerlo y comprenderlo.

Representar la nada o la no existencia fue un importante paso para las matemáticas, el cero como número fue difícil de imaginar y de aceptar, pero finalmente forma parte de nuestra vida cotidiana.

Pero si usted piensa que con los números naturales, las fracciones y el cero se acaba la historia de los números, está muy equivocado, pues por más difícil que sea imaginar el descubrimiento de nuevos números, así fue. "Los números negativos, las fracciones, los números irracionales tuvieron que ser descubiertos, y la motivación para ello se debió en cada caso a la resolución de cuestiones que de otro modo hubieran quedado sin respuesta", Simon Singh.

En general, los matemáticos siempre han tenido que buscar nuevos números que les permitan resolver nuevas situaciones, pues al igual que algunas divisiones entre números naturales no se pueden resolver con un número natural, por lo que hay que recurrir a las fracciones, otras situaciones dieron origen a la existencia de los números negativos. Como usted bien sabe, si resta 5 a 7 son 2, pero al restar 7 de 5 la solución no es inmediata, por lo que para dar solución a este tipo de problemas se necesitó incorporar la idea de números negativos.



Al igual que la idea del cero, la idea de representar las pérdidas no fue fácil, por lo que los números negativos fueron calificados de falsos y absurdos durante mucho tiempo, no obstante, encontraron su lugar en las matemáticas.

Un poco más difícil fue el "descubrimiento" de los números irracionales, los cuales obtienen su nombre del hecho de que no pueden ser representados por una fracción, y aunque en este módulo solo trabajaremos con ellos en situaciones específicas, es necesario reconocer su importancia en la historia de los números.

Falta decir que cuando los matemáticos creyeron haber encontrado todas las posibilidades que había con lo números, Bombelli se topó con un problema que lo llevó al "descubrimiento" de los números imaginarios, dando lugar a la generación de una idea muy grande sobre lo que son los números y sus relaciones.

Bibliografía

Singh, Simon, *El enigma de Fermat,* México, Planeta, 1999.

Resolver problemas

Los problemas son parte de la vida diaria. Cotidianamente enfrentamos diversas situaciones que nos hacen pensar, tomar decisiones y actuar.

Son muchos los tipos de problemas que vivimos y resolvemos de acuerdo con nuestras posibilidades e intereses.

El estudio de las matemáticas nos da herramientas e ideas para afrontar los problemas de manera más adecuada y eficiente. Precisamente por ello el aprendizaje de las matemáticas en los módulos del Eje de Matemáticas se da a partir de resolver una gran cantidad de problemas que nos ayudan a reflexionar sobre situaciones diarias y a apropiarnos de conocimientos matemáticos creados a través de la historia del hombre, para comprender y transformar la naturaleza, así como para realizar mediciones en general y cambios de dinero que se presentan a diario.

Michel Luntz afirma que resolver un problema matemático es con frecuencia una cosa muy fácil cuando está planteado correctamente. Nosotros podemos darnos cuenta de ello cuando en el mercado o supermercado analizamos los precios y las calidades de los productos para ver cuál de ellos es la mejor opción conforme a nuestros recursos y necesidades, hacemos cuentas y finalmente tomamos decisiones.

Resolver problemas es algo común y necesario en la vida del hombre, por lo que algunas personas han reflexionado en los procesos que seguimos cuando enfrentamos una situación o problema. Incluso hay discusiones muy interesantes sobre qué es un problema y sus características.

Usted, que ha resuelto muchos problemas a lo largo de su vida, ¿podría decir claramente qué es un problema? ¿Alguna vez usted se ha preguntado sobre el proceso que siguió en la resolución de una situación o problema? ¿Qué sensaciones tiene cuando enfrenta un nuevo problema? ¿Cómo se siente después de resolver un problema que le parecía muy difícil?

Algunos matemáticos comentan la satisfacción que les causa llegar a una solución, sobre todo cuando llevan días, meses y hasta años tratando de encontrar una respuesta.

Dejando el lado emocional del trabajo matemático, es interesante saber que George Polya escribió un libro llamado *Cómo plantear y resolver problemas,* donde sugiere una serie de acciones que pueden ayudar a la resolución de problemas matemáticos, por ejemplo, la resolución de un problema más sencillo, el razonamiento pausado, la descomposición en partes del problema, la necesidad de verificación.

En términos generales, Polya divide el proceso de resolución en cuatro etapas muy importantes:

- **Comprender el problema**. Que la persona identifique cuál es la incógnita, cuáles son los datos y las condiciones del problema.
- **Concebir un plan**. Definir si ya se ha resuelto un problema similar, si hay alguna fórmula relacionada con la solución, si hace falta recurrir a algún elemento auxiliar, como puede ser un objeto o un dibujo.

  Ver si puede decir el problema con otras palabras. Preguntarse si puede resolver un problema parecido pero más sencillo o si puede deducir algún elemento útil de los datos.
- **Ejecutar el plan**. Llevar a cabo los pasos propuestos y comprobar que son correctos e intentar demostrarlo.
- **Ver de forma retrospectiva**. Verificar que el razonamiento y el resultado sean correctos. Preguntarse si existe otra forma de resolverlo o si el resultado o el método empleado facilita la resolución de otro problema.

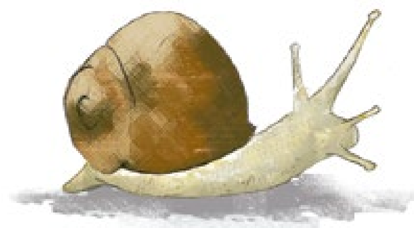
Aunque la resolución de problemas conlleva más acciones, tal parece que Polya resume muy bien el proceso de resolución, ¿usted, qué opina?

Bibliografía

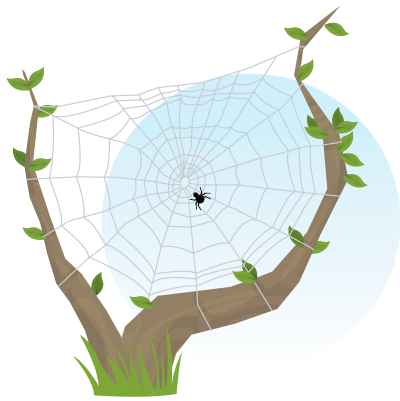
Polya, George, *Cómo plantear y resolver problemas,* México, Trillas, 1990.

Luntz, Michel, "Las matemáticas en la industria", en *Lecturas universitarias 8. Antología de matemáticas 2,* México, UNAM, 1983.

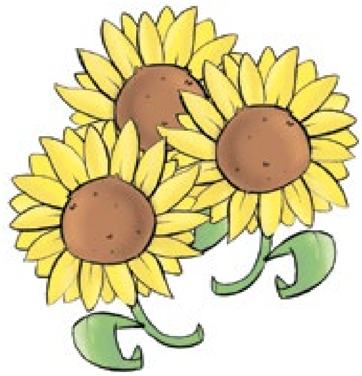
Regularidades matemáticas



Hay quienes definen las matemáticas como el estudio de las regularidades, y es que en la naturaleza se han encontrado regularidades insospechadas, incluso en situaciones completamente desordenadas, que han podido ser expresadas a través de símbolos y de relaciones matemáticas.



Las telarañas, los panales de las abejas, los caminos de las hormigas, los ciclos de la Luna, los de la Tierra y, en general, los del espacio, pueden describirse por medio de los elementos que aportan las matemáticas. Incluso el crecimiento de las plantas y de los animales y el desarrollo de sociedades presentan regularidades numéricas y geométricas que pueden estudiarse a partir de fundamentos matemáticos.



Actualmente, las matemáticas han desarrollado conocimientos que permiten estudiar la formación de montañas y de islas, la producción de terremotos, las caídas bursátiles (negocios) y otros fenómenos que representan desastres para la vida humana.

En efecto, las regularidades que pueden encontrarse en innumerables situaciones permiten sistematizar y predecir comportamientos futuros, por lo que las matemáticas dan gran importancia al estudio de las regularidades que se encuentran por todos lados y en especial en las relaciones numéricas que rigen procesos naturales, económicos y sociales.

Pero las matemáticas van más allá y estudian las relaciones y regularidades numéricas y geométricas encontradas en su propia estructura, para ejemplo basta un botón. En el siglo XVIII, Carl Friedrich Gauss, un matemático que se ganó el sobrenombre de "Príncipe de las matemáticas", apenas cumplidos 10 años, percibió una regularidad matemática interesante. Fue cuando el maestro pidió al grupo que sumaran los número del 1 al 100. Gauss rápidamente encontró que la suma del primero y último números (1 + 100) era igual a 101.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots 96 + 97 + 98 + 99 + 100$$

Que la suma del segundo y penúltimo números (2 + 99) era también 101 y que los siguientes (3 + 98) sumaban 101, y que en total había 50 pares de números que sumaban 101, por lo que era más rápido multiplicar 101×50 que sumar número por número.

Así es, encontrar regularidades puede ahorrar trabajo, lo cual es una de las razones más importantes de ser de las matemáticas, pues siempre buscan optimizar el trabajo, el tiempo, el dinero y el esfuerzo.

Las regularidades también están relacionadas con la belleza, observe la forma de un caracol, una telaraña, el centro de un girasol, los adornos de las iglesias, y ponga mucha atención en los tejidos y bordados que hacen los artesanos mexicanos, ¡son bellísimos!

¿Cómo podrían los seres humanos dar la espalda a tanta regularidad y belleza?

Bibliografía

Perero, Mariano, *Historia e historias de matemáticas,* México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1994.

¿Vivir sin matemáticas? ¡Imposible!

Quienes piensan que no necesitan de las matemáticas están muy equivocados, pues son muchos los ejemplos que existen de la utilización diaria de los números y sus operaciones, y aunque hay muchos más que se esconden a nuestros ojos, es posible reflexionar sobre la tecnología que usamos diariamente.

Como usted comprobó en la actividad que realizó recientemente en su Libro del adulto, las matemáticas se usan en las construcciones, en los cálculos de dinero, en la utilización de energía eléctrica y hasta para cocinar.

Al encender un foco estamos haciendo uso de los esfuerzos que hicieron los físicos y matemáticos para lograr que los dinamos generadores de corriente eléctrica rotaran (giraran); además tuvieron que superar la difícil tarea de transportar energía eléctrica, para lo cual también hicieron cálculos matemáticos.

Por si fuera poco, para que viaje la energía eléctrica, tuvo que calcularse la resistencia de los cables para que no se rompan ni se flexionen demasiado. El calentamiento de todos los conductores eléctricos está calculado para que no se quemen y llegue la cantidad exacta de energía que requiere el filamento de un foco para encenderse.

La invención de un instrumento tan sencillo como la bicicleta necesitó de los principios de la mecánica y, por supuesto, casi todo lo que usamos ha sido producto de siglos de trabajo e investigación matemática.

Áreas de estudio como la trigonometría hicieron posible el desarrollo de la navegación; en general, la física utiliza una gran cantidad de conocimientos matemáticos, gracias a ello ha habido avances tecnológicos importantes y la industria se ha transformado.

Aunque casi siempre las matemáticas han ido delante de la física, actualmente los avances logrados por la tecnología y la industria han permitido crear aparatos para resolver problemas matemáticos muy complejos. Las computadoras, también llamadas ordenadores, han venido a resolver problemas que llevaría años poder resolver por otros medios, debido, entre otras cosas, a la gran cantidad de cálculos que se requieren.

Las computadoras han revolucionado el conocimiento matemático y le han dado nuevas formas de estudiar la naturaleza, la sociedad, el cuerpo humano, el Universo; en fin, han abierto nuevos horizontes de investigación, ya que en nuestros días es posible simular fenómenos como la formación de las arterias, la formación del caos vial, la formación de huracanes y tormentas, etcétera.

Michel Luntz considera que el desarrollo de la técnica da la posibilidad de nuevos avances, produciendo una reacción en cadena que a veces es frenada por cuestiones económicas, principalmente por los bajos salarios que tienen los físicos y matemáticos que hacen investigación. ¿Usted, qué opina?

Bibliografía

Luntz, Michel, "Las matemáticas en la industria", en *Lecturas universitarias 8. Antología de matemáticas 2,* México, UNAM, 1983.

¿Matemáticas aplicadas?

Las personas comunes pensamos que las matemáticas no tienen mucha relación con la vida diaria. Creemos que se reducen a operaciones básicas, como la suma, la resta, la multiplicación y la división; al cálculo de perímetros, áreas y volúmenes, y al conocimiento de unas cuantas características de las figuras y cuerpos geométricos.

Pensamos, erróneamente, que solo los genios pueden resolver problemas y acercarse y disfrutar de un conocimiento matemático más elaborado, con mayores frutos y ventajas. Nos imaginamos que los matemáticos no realizan ningún esfuerzo para comprender y proponer nuevas teorías matemáticas, creemos que es la inspiración, y no el trabajo, lo que permite avances importantes.

Muchas veces pensamos que las matemáticas no son para nosotros, cosa que pagamos muy caro cuando tenemos que aceptar contratos y situaciones que no entendemos y dejamos en manos de otros para que nos expliquen o simplemente tomen las decisiones que debíamos tomar nosotros.

Con frecuencia nos negamos a aprender si lo que aprendemos no tiene una aplicación inmediata, porque ponemos en primer lugar lo utilitario; no nos damos cuenta que existen muchísimas situaciones en las que requerimos un conocimiento matemático, y no lo usamos porque no lo tenemos, no porque no sea de utilidad.

Santiago López de Medrano, matemático orgullosamente mexicano, nos invita a reflexionar acerca de las matemáticas teóricas o puras y las aplicadas. Es muy difícil hacer una distinción entre unas y otras pero, fundamentalmente, las matemáticas aplicadas implican algún tipo de utilidad en cualquier rama del conocimiento o actividad humana, sea científica, técnica, cultural o de cualquier tipo. En cambio, las matemáticas puras surgen de la propia investigación matemática y las inquietudes e intereses de los matemáticos.

Uno puede pensar que no tiene sentido hacer matemáticas que no se utilicen, que solo tendrían que desarrollarse ramas de las matemáticas que tengan una utilidad inmediata. No obstante, López de Medrano encuentra que algunas ramas de las matemáticas aplicadas han dado origen a un tipo de matemáticas puras, y que algunas ramas de las matemáticas puras han encontrado una aplicación, por ejemplo, en el diseño y estudio de lenguajes para programar calculadoras electrónicas, se han estado aplicando técnicas de la lógica matemática, en particular, de la teoría de las demostraciones.

También Michel Luntz señala que uno de los éxitos de las matemáticas puras es la construcción de piezas aerodinámicas, que facilitan el movimiento debido a que tienen una menor resistencia al aire.

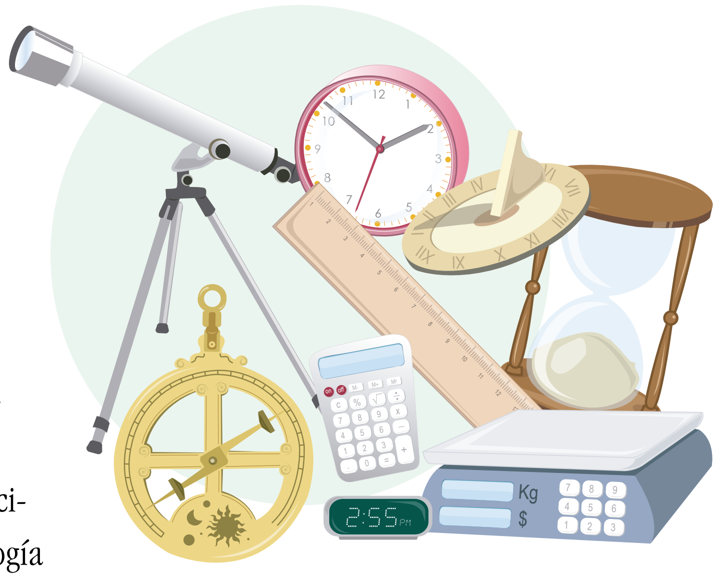
Es interesante saber que las matemáticas que han surgido para solucionar problemas específicos de la física, también han dado origen a ramas de las matemáticas puras. Por ello, es cada vez más difícil hacer una distinción entre las matemáticas puras y las aplicadas.

Bibliografía

López de Medrano, Santiago, "Las puras y las aplicadas", en *Lecturas universitarias 8. Antología de matemáticas 2,* México, UNAM, 1983.

Luntz, Michel, "Las matemáticas en la industria", en *Lecturas universitarias 8. Antología de matemáticas 2,* México, UNAM, 1983.

Distancias inaccesibles



En la vida diaria, generalmente realizamos medidas directas, es decir, tomamos una regla, una báscula, un reloj o cualquier otro aparato que sirva para medir y efectuamos la medición del largo y ancho de una mesa, del peso de los productos que compramos, del tiempo que tardamos para hacer alguna actividad, etcétera.

Así vista, la medición parece muy sencilla, y aunque en la actualidad la tecnología permite hacer mediciones muy exactas, ¿se ha puesto usted ha pensar en cómo se medía la distancia a la que se encontraba un barco con respecto a un puerto?, ¿cómo se ha calculado la distancia entre la Tierra y la Luna, la Tierra y el Sol, o entre otros dos astros cualesquiera del Universo? ¿Está de acuerdo en que es imposible medir directamente esas distancias? Efectivamente, la dificultad que existe para hacer mediciones directas ha obligado a científicos, astrónomos y personas que trabajan en la navegación y en la aeronáutica, entre otras actividades, a realizar mediciones indirectas, en las que se aplican principios fundamentales de aritmética, álgebra y geometría.

Se dice que uno de los sabios que hizo las primeras demostraciones geométricas fue Tales (600 años antes de nuestra era), filósofo y matemático griego que vivió en la ciudad de Mileto. Entre otras cosas, Tales pudo medir la distancia entre un barco y la orilla aplicando la geometría.

La medición también tiene una larga historia, y con los adelantos tecnológicos que vivimos hoy en día es muy probable que nos sorprenda en poco tiempo.

Bibliografía

Pereró, Mariano, *Historia e historias de matemáticas,* México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1994.

La prueba en matemáticas

El álgebra es un campo de las matemáticas que permite generalizar las relaciones matemáticas que existen en fenómenos similares e, incluso, muy distintos.

Por ejemplo, Pitágoras fue un filósofo y matemático griego que vivió en el año 300 antes de nuestra era, él dio su nombre al importante teorema matemático: "En todo triángulo rectángulo el área del cuadrado que se construye sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados que se construyen en los catetos".

Dicho teorema existió desde mucho tiempo antes que naciera Pitágoras. Se cree que en Babilonia lo conocían, pues se han encontrado mosaicos que modelan dicho teorema; no obstante, es probable que Pitágoras haya sido la primera persona que demostró la existencia de tal teorema.

En matemáticas la demostración es muy importante, a diferencia de las ciencias experimentales, como la física, que toman como verdadero un conocimiento después de haber experimentado una y otra vez en las mismas condiciones y haber obtenido resultados muy similares; en matemáticas lo verdadero se establece a partir de encontrar relaciones lógicas completamente fundamentadas con axiomas y teoremas anteriormente establecidos.

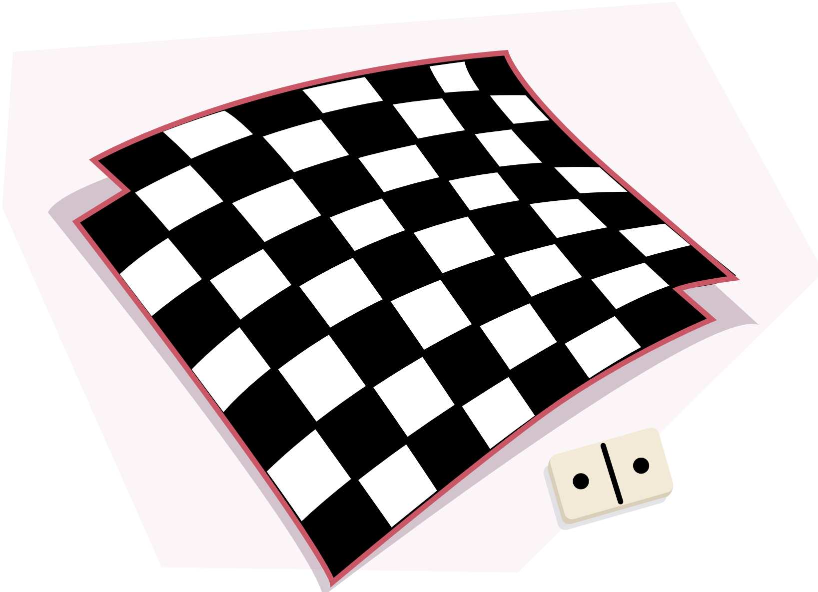
Por ejemplo, se tienen fichas de dominó que cubren exactamente dos cuadros de un tablero de ajedrez, ¿es posible cubrir con 31 fichas un tablero al que le faltan dos esquinas opuestas, por lo que solo quedan 62 cuadros?

De acuerdo con Simon Singh es posible afrontar el problema de dos formas: la científica y la matemática. En el primer caso, el científico experimentará una y otra vez. Después de muchos intentos en que no cumple el objetivo, tal vez afirme que hay evidencias para decir que no es posible cubrir el tablero con las 31 fichas, dejando la posibilidad que llegue alguien y encuentre una manera de hacerlo.

La resolución matemática obliga a encontrar un argumento lógico que permita llegar a una conclusión en la que no haya duda y permanezca a través del tiempo.

Simon Singh da la siguiente respuesta:

- Los cuadros que faltan en el tablero son blancos. Por lo tanto, hay 32 cuadros negros y 30 cuadros blancos.
- Cada ficha cubre dos cuadros vecinos, todos los cuadros vecinos son de colores contrarios, o sea, uno negro y otro blanco.



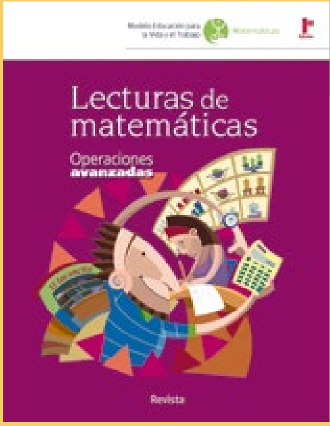
- Por esta razón, las 30 primeras fichas de dominó cubrirán 30 cuadros blancos y 30 cuadros negros del tablero, con independencia del modo que se coloquen.
- En consecuencia, siempre nos encontraremos con una ficha de dominó y con dos cuadros negros sobrantes.
- Pero cada ficha de dominó tapa dos cuadros contiguos y estos son siempre de colores opuestos. Sin embargo, los cuadros sobrantes son de idéntico color, así que no podemos cubrir ambos con la ficha de dominó que nos queda. Por tanto, ¡cubrir todo el tablero es imposible!

Como puede ver, Simon Singh no deja posibilidades para que llegue otra persona y encuentre la manera de colocar las fichas y lograr el objetivo. De igual forma, Pitágoras demostró que es posible aplicar su teorema a cualquier triángulo rectángulo, y aunque muchos años antes otros pueblos usaban las relaciones que enuncia el teorema, fue Pitágoras quien dio los fundamentos para generalizarlo y poder usarlo para hacer demostraciones más complejas.

Bibliografía

Willerding, Margaret F., "Temas de geometría", en *Lecturas universitarias 8. Antología de matemáticas 1,* México, UNAM, 1983.

Singh, Simon, *El enigma de Fermat,* México, Planeta, 1999.



El aprendizaje de las matemáticas está ligado al desarrollo de competencias que permiten la resolución de problemas diversos en distintas situaciones.

Aprender matemáticas no es solo hacer operaciones, aplicar fórmulas y decir resultados; más bien, es crear una forma diferente de ver el mundo y de conocerlo.

Observar los acontecimientos naturales, humanos, económicos y sociales bajo los “lentes” de las matemáticas le ayudará a comprenderlos de una forma más clara y distinta.


Es tiempo de
superarse...
¡con
Educación
para la Vida
y el Trabajo!