



Matemáticas 3

Ecuaciones Lineales

Una ecuación lineal es una ecuación de primer grado con 2 incógnitas cuya forma general es:

$$\underline{“aX + bY + c = 0”}$$

“a, b, c” son constantes reales, “X, Y” son variables. Toda ecuación lineal graficada es una línea recta.

Grafica la expresión **“2X – 3Y – 12 = 0”**

$$2X - 3Y - 12 = 0$$

$$2X - 3(0) - 12 = 0$$

$$2X = 12$$

$$X = 12 / 2$$

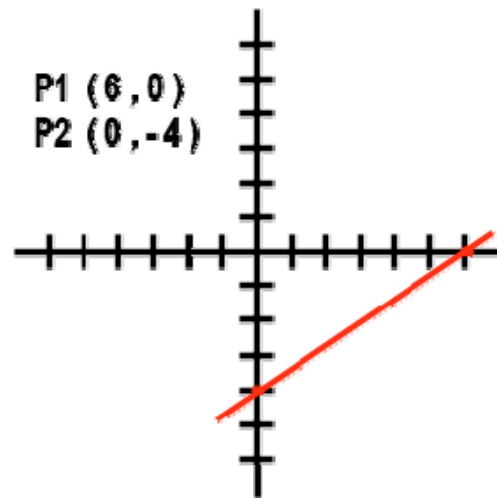
$$X = 6$$

$$2(0) - 3Y - 12 = 0$$

$$-3Y = 12$$

$$Y = 12 / -3$$

$$Y = -4$$



Función Lineal

La función lineal esta definida por la ecuación:

$$\underline{f(x) = mX + b}$$

Donde:

$$f(x) = Y$$

m = pendiente de la recta

b = ordenada al origen (intersección en el eje “Y”)

Además “m, b” son constantes reales



Ejemplo:

Indica el valor de la pendiente y la ordenada al origen de la recta cuya ecuación es: $-7X - Y + 21 = 0$

$$-7X - Y + 21 = 0$$

$$-Y = 7X - 21$$

$$Y = 7X - 21 / -1$$

$$Y = -7X + 21$$

$$\underline{m = -7}$$
$$\underline{b = 21}$$

indica el valor de la pendiente y la ordenada al origen de la ecuación :
 $4x - \frac{1}{2}y + \frac{2}{5} = 0$

$$-\frac{1}{2}Y = -4X - \frac{2}{5}$$

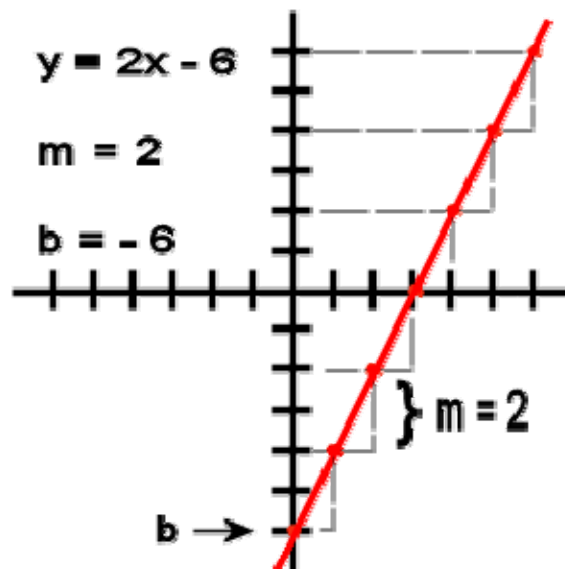
$$Y = (-4X - \frac{2}{5}) / -\frac{1}{2}$$

$$Y = 8X + \frac{4}{5}$$

$$\underline{m = 8}$$
$$\underline{b = \frac{4}{5}}$$

Pendiente

La pendiente (m) indica cuantas unidades cambia la ordenada cuando "X" aumenta una unidad.



Para encontrar la pendiente de una recta que pasa por 2 puntos se utiliza la ecuación

$$\underline{m = Y2 - Y1 / X2 - X1}$$



Encuentra la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

P1 (1 , - 4)

P2 (5 , 4)

$$m = 4 - (-4) / 5 - 1$$

$$m = 4 + 4 / 5 - 1$$

$$m = 8/4$$

$$m = 2$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales esta formado por 2 ecuaciones de primer grado con 2 incógnitas; los métodos de resolución son 2:

- **Método grafico:** se grafican las 2 ecuaciones en el mismo plano cartesiano; el punto de intersección de ambas líneas será el punto solución del sistema. Si las líneas fueran coincidentes, entonces el sistema tiene una infinidad de soluciones; si las líneas fueran paralelas entonces el sistema no tiene solución y se le llama sistema inconsistente.
- **Método algebraico:** existen 2 métodos el de “suma o resta” y el de “sustitución”

Resolución del sistema de ecuaciones por el método de suma o resta

$$X + Y - 2 = 0$$

$$X - Y - 4 = 0$$

Eliminamos Y dado que tienen el mismo valor pero signo diferente y nos queda

$$2X - 6 = 0$$

$$2X = 6$$

$$X = 6/2$$

$$X = 3$$

Sustituimos “X” en cualquier ecuación

$$3 + Y - 2 = 0$$

$$Y = -3 + 2$$

$$Y = -1$$

$$(X, Y) = (3, -1)$$



Resuelve el siguiente sistema por el método de suma o resta

$$\begin{array}{r} 3X + 2Y - 6 = 0 \\ X - 2Y - 10 = 0 \\ \hline 4X - 16 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4X = 16 \\ X = 16/4 \\ X = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3(4) + 2Y - 6 = 0 \\ 12 + 2Y - 6 = 0 \\ 2Y = -12 + 6 \\ 2Y = -6 \\ Y = -6 / 2 \\ Y = -3 \end{array}$$

$$(X, Y) = (4, -3)$$

Resolución del sistema de ecuaciones por el método de sustitución

$$\begin{array}{l} 3X + 2Y = 5 \quad \dots(1) \\ X + 3Y = 4 \quad \dots(2) \end{array}$$

Despejamos "X" de la ecuación (2) (por ser la mas simple)

$$\begin{array}{l} X + 3Y = 4 \\ X = 4 - 3y \quad \dots(3) \end{array}$$

Sustituimos "X" en la ecuación (1) (no puede ser en la misma que se despejo)

$$\begin{array}{l} 3(4 - 3Y) + 2Y = 5 \\ 12 - 9Y + 2Y = 5 \\ 12 - 7Y = 5 \\ -7Y = 5 - 12 \\ -7Y = -7 \\ Y = -7 / -7 \\ Y = 1 \end{array}$$

Sustituimos "Y" en la ecuación (3)

$$\begin{array}{l} X = 4 - 3(1) \\ X = 4 - 3 \\ X = 1 \end{array}$$



Ejercicio

El perímetro de un rectángulo mide 26 metros y uno de sus lados es 3 metros mas largo que el otro. ¿Cuales son sus dimensiones?

$$2X + 2Y = 26$$

$$X = 3 + Y$$

$$2(3 + Y) + 2Y = 26$$

$$6 + 2Y + 2Y = 26$$

$$6 + 4Y = 26$$

$$4Y = 26 - 6$$

$$4Y = 20$$

$$Y = 20 / 4$$

$$Y = 5$$

Una vez encontrado “Y” lo sustituimos para encontrar “X”

$$X = 3 + 5$$

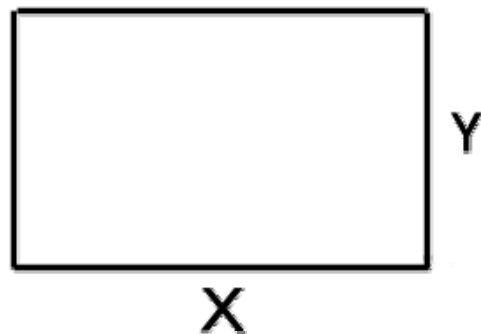
$$X = 8$$

X = largo

Y = ancho

X = 8 metros

Y = 5 metros



Resolución de sistemas de ecuaciones con 3 variables

$$2X - 3Y + Z = -1 \dots(1)$$

$$X + 2Y + Z = 2 \dots(2)$$

$$-5X + 2Y - 3Z = -2 \dots(3)$$

Utilizando ecuación (1) y (2)

Invertimos todos los signos de la ecuación (2) para poder eliminar “Z”

$$2X - 3Y + Z = -1$$

$$-X - 2Y - Z = -2$$

$$X - 5Y = -3 \dots(4)$$

Utilizando ecuación (2) y (3)

Multiplicamos la ecuación (2) por el valor de Z en la ecuación (3)

$$3X + 6Y + 3Z = 6$$

$$-5X + 2Y - 3Z = -2$$

$$-2X + 8Y = 4 \dots(5)$$



Ocupamos ecuación (4) y (5)

Multiplicamos la ecuación (4) por el valor de X en la ecuación (5)

$$\begin{array}{r} (2)X - 5Y = -3 \\ -2X + 8Y = 4 \\ \hline 2X - 10Y = -6 \\ -2X + 8Y = 4 \\ \hline -2Y = -2 \\ Y = -2 / -2 \\ Y = 1 \end{array}$$

Para encontrar el valor de "X" sustituimos "Y" en la ecuación (4) o (5)

$$\begin{array}{r} X - 5(1) = -3 \\ X - 5 = -3 \\ X = 5 - 3 \\ X = 2 \end{array}$$

Para encontrar el valor de "Z" sustituimos el valor de "X" y "Y" en cualquiera de las 3 primeras ecuaciones

$$\begin{array}{r} X + 2Y + Z = 2 \\ 2 + 2(1) + Z = 2 \\ 4 + Z = 2 \\ Z = 2 - 4 \\ Z = -2 \end{array}$$

Por tanto $X=2, Y=1, Z=-2$

Tipos de rectas

Rectas paralelas (misma pendiente)

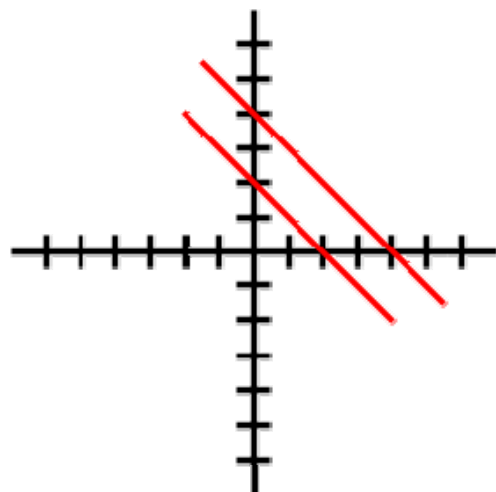
$$Y = -2X + 3 \dots (1)$$

$$2Y = -4X - 1 \dots (2)$$

Como la ecuación (1) ya esta resuelta, pasamos a resolver la ecuación (2)

$$Y = -4X/2 - 1/2$$

$$Y = -2X - 1/2$$





Rectas coincidentes (la misma recta en 2 ecuaciones)

$$-2/3 X + 2Y = 1 \dots (1)$$

$$2Y = 2/3X + 1$$

$$Y = (2/3X + 1) / 2$$

$$Y = 2/6 X + 1/2$$

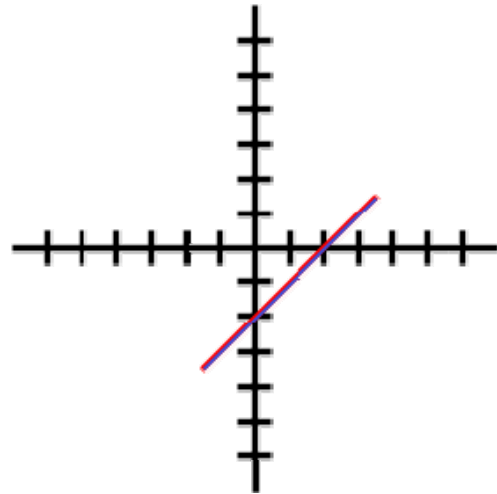
$$Y = 1/3 X + 1/2$$

$$-2X + 6Y = 3 \dots (2)$$

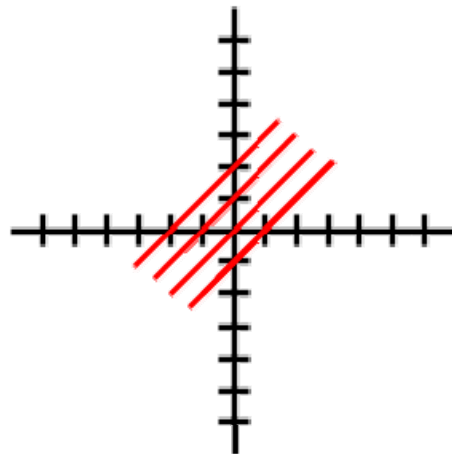
$$6Y = 2X + 3$$

$$Y = 2X/6 + 3/6$$

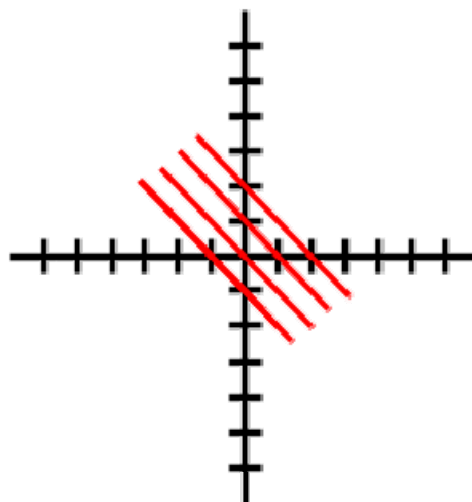
$$Y = 1/3 X + 1/2$$



Pendientes positivas



Pendientes negativas

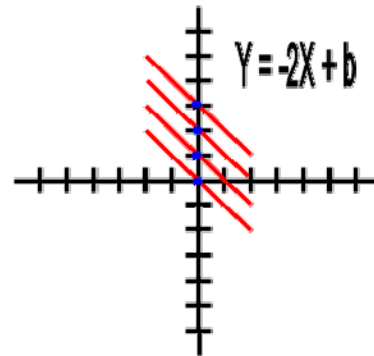
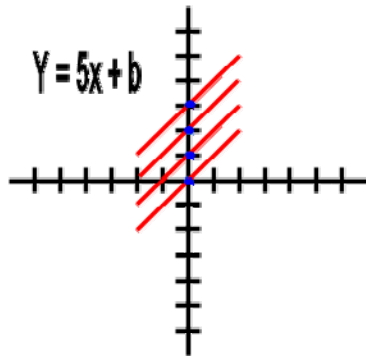




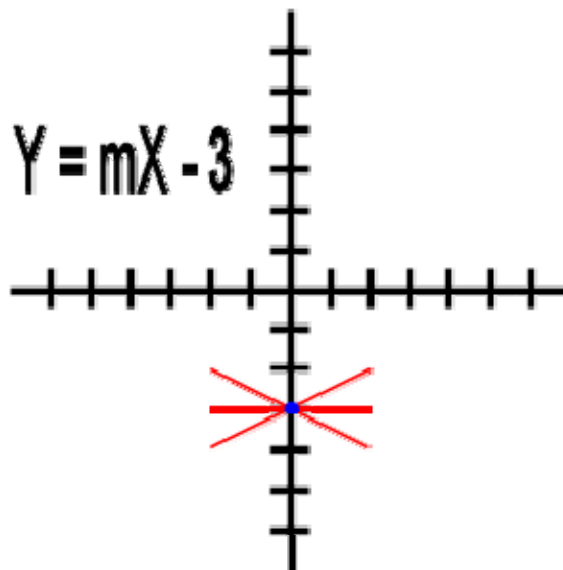
Familias de rectas

Como en toda familia deben de tener algo en común.

Caso 1: familia de rectas que tienen la misma pendiente pero difieren en la ordenada al origen, en este caso estamos hablando de una serie de rectas como se ejemplifica a continuación



Caso 2: familia de rectas que coinciden en su ordenada al origen, pero difieren en su pendiente



Desigualdades lineales

Encuentra el conjunto solución de la desigualdad:

$$3X + Y + 1 \geq 0$$

Primer paso:

Despejamos de la forma ya conocida

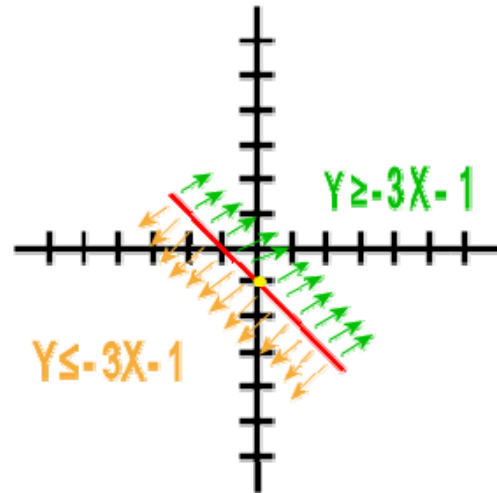
$$Y \geq -3X - 1$$



Segundo paso:
Encuentra la recta crítica de comparación

$$Y = -3X - 1$$

Tercer paso:
Grafica la crítica



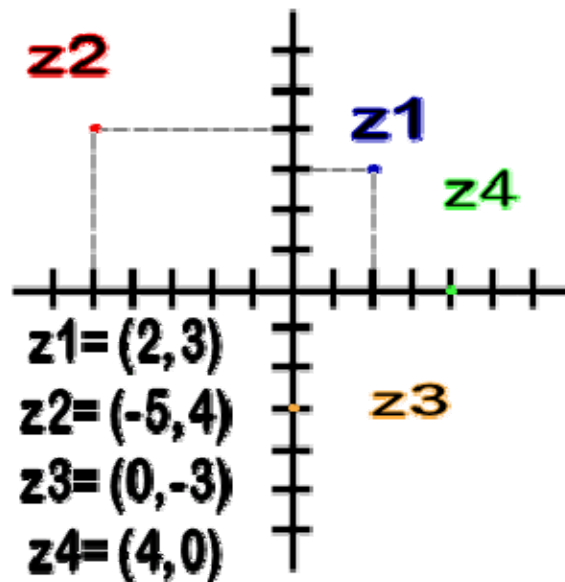
Números complejos

Un número complejo es un par ordenado con componentes reales:

“a, b”

$$C = \{z \mid z = (a, b), a, b \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo:

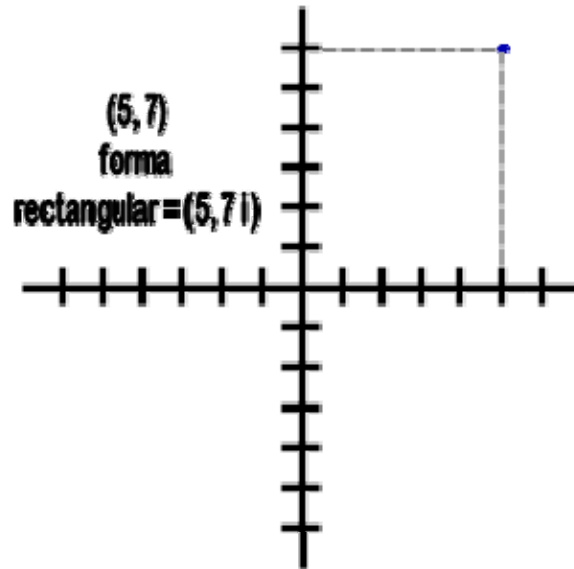


Dos números complejos son iguales si y solo si tienen el mismo primer componente y también son iguales sus segundos componentes.

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$$
$$(3/2, 1) = (3/2, 2/2)$$



Cual es la grafica del complejo (5,7)



Recordemos que:

$$\sqrt{-4} = 2i$$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \sqrt{-1} = 2i$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$2i = 2\sqrt{-1}$$

$$7i = 7\sqrt{-1}$$

$$\sqrt{-7} = \sqrt{7}i$$

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3}i$$

$$(i)^2 = (\sqrt{-1})^2$$

$$i^2 = -1$$

Operaciones con números complejos

Suma de números complejos

Se suman algebraicamente es decir se suman términos semejantes

$$(3, -2) + (-7, 5) = (-4, 3)$$

Propiedades para la suma de números complejos

Propiedad conmutativa

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

Propiedad asociativa

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$



Propiedad del elemento identidad

El elemento identidad o elemento neutro para los números complejos es el $(0, 0)$, (doble cero)

$$\begin{aligned}(3, 7) + (0, 0) &= (3, 7) \\ (0, 0) + (\pi, \sqrt{-7}) + (0, 0) &= (\pi, \sqrt{-7})\end{aligned}$$

Propiedad del inverso aditivo

Todo número complejo tiene un inverso aditivo único excepto el $(0, 0)$ todo número complejo sumado con su inverso aditivo da como resultado el $(0, 0)$

$$(6, 12) = (-6, -12)$$

Multiplicación de números complejos

se operan como un binomio simple y por ello es recomendable manejarlos en su forma rectangular

$$(7, 2)(3, -1)$$

$$\begin{array}{r}7+2i \\ \underline{3-i} \\ 21+6i \\ -7i-2i^2 \\ \hline 21-i-2i^2\end{array}$$

$$\begin{array}{r}21-i-2(-1) \\ 21-i+2 \\ \hline 23-i\end{array}$$

Propiedades para la multiplicación de números complejos

Propiedad conmutativa

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

Propiedad asociativa

$$z_1 (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) z_3$$

Propiedad distributiva

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$



Propiedad del elemento identidad

El elemento identidad o elemento neutro para la multiplicación de números complejos es el $(1, 0)$

$$(1, 0)(2, 3) = (2 - 0, 3 + 0) = (2, 3)$$

Propiedad del inverso multiplicativo o recíproco

Todo número complejo tiene un recíproco único excepto el $(0, 0)$, todo número complejo multiplicado por su recíproco da como resultado $(1, 0)$

El recíproco de (a, b) es:

$$(a/a^2+b^2, -b/a^2+b^2)$$

División de números complejos

$$z_1 = (a_1, b_1)$$

$$z_2 = (a_2, b_2)$$

Entonces

$$z_1/z_2 = \frac{(a_1)(a_2) + (b_1)(b_2)}{(a_2)^2 + (b_2)^2} + \frac{(b_1)(a_2) - (a_1)(b_2)}{(a_2)^2 + (b_2)^2} i$$

Ejercicios:

$$\begin{aligned} 6+3i / 2+i &= (12 + 3/4 + 1) + (6 - 6/4+1) i = \\ &15/5 + 0/5 i = \\ &3 + 0 i = \\ &3 \end{aligned}$$

Conjugados de números complejos:

Si $(a+bi)$ su conjugado sería: $(a - bi)$

Si $z = a + bi$ entonces su conjugado sería: $\bar{z} = a - bi$

Si $z = a - bi$ entonces su conjugado sería: $\bar{z} = a + bi$

Si $z = 4 + 7i$ entonces su conjugado siempre va a ser un número real



Ejemplo

$$\begin{array}{r} 4 + 7i \\ 4 - 7i \\ \hline 16 + 28i \\ - 28i - 49i^2 \\ \hline 16 - 49i^2 \\ \text{Entonces} \\ 16 + 49 = \\ 65 \end{array}$$

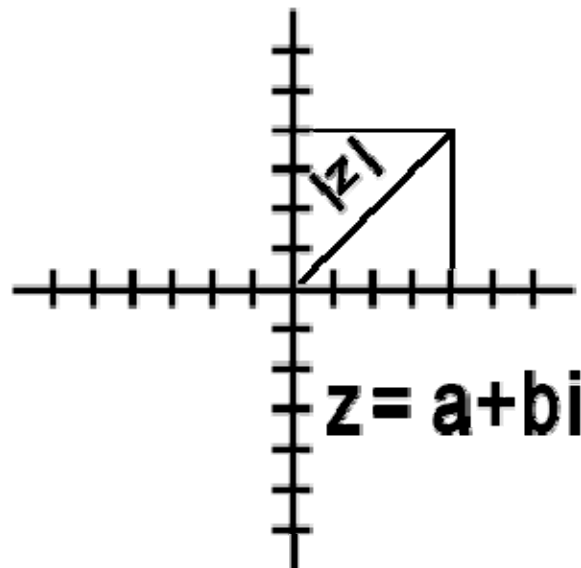
Valor absoluto de un número complejo

El valor absoluto de un número complejo representa geométricamente la distancia que hay entre ese número y el origen; de forma algebraica lo podemos obtener como:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Encuentra la distancia que hay entre el punto: $z = -12, -16i$ al origen

$$|-12 - 16i| = \sqrt{(12)^2 + (-16)^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$$



Ecuaciones de segundo grado o cuadráticas

Una ecuación de segundo grado o cuadráticas tiene como exponente mayor un 2 y se resuelve por el método de factorización o por fórmula general.



La forma general de una ecuación cuadrática es:

$$aX^2 + bX + c = 0$$

Donde: “a, b, c” son constantes reales

Resolución de la ecuación cuadrática por el método de factorización.

$$\begin{aligned} X^2 + 7X + 12 &= 0 \\ (X + 3)(X + 4) &= 0 \\ X + 3 &= 0 \quad X + 4 = 0 \\ X_1 &= -3 \quad X_2 = -4 \end{aligned}$$

Toda ecuación de segundo grado tiene 2 soluciones

Resolución de la ecuación cuadrática por fórmula general

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} 3X^2 &= 4X - 1 \\ 3X^2 - 4X + 1 &= 0 \\ X &= \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} \\ X &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} \\ X &= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{4 + 2}{6} = \frac{6}{6} = 1 \\ X_2 &= \frac{4 - 2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Análisis de la función cuadrática

- La gráfica de la función cuadrática es una curva llamada parábola cuyo vértice es :

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

- la gráfica es simétrica con respecto a la recta:

$$X = -\frac{b}{2a}$$

- Si $a > 0$ entonces la curva es cóncava hacia arriba y el vértice será el punto mas bajo de la gráfica.
- Si $a < 0$ entonces la curva será cóncava hacia abajo y el punto mas alto de la gráfica será el vértice.
- Los puntos donde interceptan la gráfica con el eje “X” son llamados raíces o ceros.



- Para encontrar las raíces o ceros se convierte la función cuadrática a la forma general haciendo que $f(x) = 0$; y se resuelve la ecuación por algún método

$$f(x) = aX^2 + bX + c$$

- Para conocer el tipo de raíces se analiza el discriminante

Discriminante

El discriminante es la expresión " $b^2 - 4ac$ " que se encuentra dentro del radical en la formula general; de su valor depende el tipo de raíces o ceros; de la siguiente forma:

1. Si " $b^2 - 4ac = 0$ " entonces las 2 raíces son racionales reales, iguales, la grafica de la parábola tiene su vértice en el eje "X"; por lo que toca al eje "X" en un solo punto.
2. Si " $b^2 - 4ac > 0$ " si la raíz es exacta entonces serán 2 raíces racionales reales diferentes; si la raíz es inexacta entonces serán 2 raíces irracionales reales diferentes; la grafica de la parábola interfecta al eje en "X" en 2 puntos reales.
3. Si " $b^2 - 4ac < 0$ " entonces las raíces serán imaginarias, la gráfica de la parábola no interfecta ni toca al eje "X".

Ejercicio:

$f(x): X^2 + 6X + 9 = 0$

Vértice

$$v = (-b/2a, 4ac - b^2/4a)$$

$$v = (-6 / 2(1), 4(1)(9) - (6)^2 / 4(1))$$

$$v = (-3, 0)$$

Análisis de "a"

$$a = 1$$

$$a > 0$$

Discriminante

$$b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

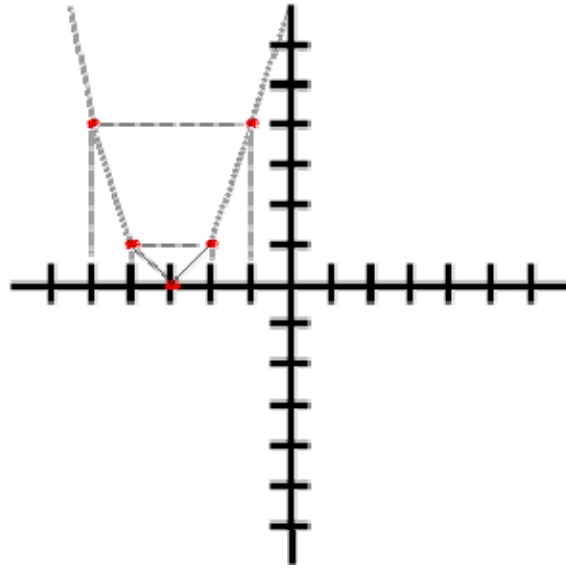
**Las raíces son racionales reales iguales
Intersecta en un punto al eje "X"**

Radices

$$X^2 + 6x + 9 = 0$$

$$(X + 3)(X + 3) = 0$$

$$X_1 = -3 \quad X_2 = -3$$



Desigualdades cuadráticas

$$X^2 - 5X > -6$$

$$X^2 - 5X + 6 > 0$$

Por tanto "Y" es > que cero

Convertimos la desigualdad en igualdad para resolverla

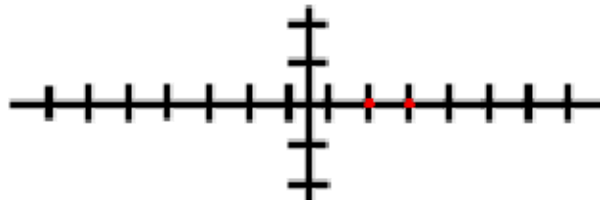
$$X^2 - 5X + 6 = 0$$

$$X = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$X = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$X_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$X_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$



$$\{X \in \mathbb{R} \mid X < 2 \text{ y } X > 3\}$$



Recuerda:

