M A T E M Á T I C A S

Números Reales

Racionales

Irracionales

Son aquellos no periódicos

Infinitos: $\sqrt{2}$: 1.41421

π : 3.1416

° Enteros

*Fraccionarios

° Positivos ° Negativos

*Positivos *Negativos.

*MIXTOS: $3\,\frac{1}{4}$

° Naturales (1,2,3,4,5,6.... α)

*Finitos : $\frac{1}{2}$ = 0.5; $\frac{3}{4}$ = 0.75

° Primos (2,3,5,7,11,13,17...)

° Pares (.... –4,-2,0,2,4,6,..., ∞)

*Periódicos infinitos : $\frac{1}{3}$ = $0.33\overline{3}$; $\frac{2}{3}$ = $0.66\overline{6}$

° Impares (-∞...,-3,-1,0, 1,3,5,...,∞)

° Dígitos (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)

° Poli - dígitos: formados por la unión de dos o mas dígitos: 10,142,1246, ... etc.

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

a) Cerradura.- Cuando se operan con números reales se obtienen números reales.

b) Tricotomía.- Propiedad de orden, entre dos números reales solo puede existir una de tres relaciones. $a > b$; $a = b$ ó $a < b$.

c) Conmutativa.- Se cumple solo para adición y productos. El orden de los sumandos o factores no alteran la suma o producto.

d) Asociativa. - Los sumandos o factores se pueden agrupar o asociar de diferente manera y obtenerse el mismo resultado.

e) Distributiva.- El producto de un número por la suma o diferencia de otros dos números diferente será igual al producto de él número por cada sumando, o igual al producto del número por el minuendo menos el producto del número por él sustraendo respectivamente.

f) Existencia de elementos neutros.- Dado un número (a) siempre existe un número (b) tal que:

1) a + b = a 2) a – b = a

3) a * b = a 4) a / b = a

Siendo (b) en los dos primeros casos cero y en los casos 3 y 4 uno.

g) Inverso Aditivo. – El inverso aditivo de un número (a) es (-a) de tal forma que a -a = 0 y dado un número (-a) el inverso aditivo es (a) de tal forma que -a +a = 0.

Por lo tanto el inverso aditivo de un número real es el mismo número pero con signo contrario.

Inverso Multiplicativo. - El inverso multiplicativo de un número real, es el cociente de la unidad entre el mismo número de tal forma que:

a * 1 / a = 1

h) Transitiva. - Sí $a = b$ e independientemente $b = c$ $\therefore$ $a = c$
Sí $a > b$ e independientemente $b > c$ $\therefore$ $a > c$
Sí $a < b$ e independientemente $b < c$ $\therefore$ $a < c$

i) Leyes de la igualdad:
1) Sí $x = y$ y $p \in \Re$ $\therefore$
$x + p = y + p$.
2) Sí $x = y$ y $q \in \Re$ $\therefore$
$x * p = y * q$

ARITMETICA

OPERACIONES CON NUMEROS REALES

Leyes de los signos
Valor absoluto. Distancia en unidades recorridas sobre la recta numérica, del cero hacia él numero en cuestión sin observar el sentido.

° Suma. Valor numérico
(+) + (+) = + suma de valores absolutos. ------------------------- (4) + (2) = 6
(-) + (-) = - suma de valores absolutos. ------------------------- (-7) + (-10) = -17
(+) + (-) = { signo de él número con mayor valor absoluto. (20) + (-13) = 7
(-) + (+) = El valor numérico de la operación es la diferencia de valores absolutos.

° Producto
(+) (+) = + Valor numérico productos de los valores absolutos (3) (4) =12
(-) (-) = + (-6) (-5)=30
(+) (-) = - (9) (-2) = 18
(-) (+) = - (-10) (4) = -40

° Cociente
+/+ = + 8 / 2 = 4
-/- = + Valor numérico división de los valores absolutos. –35 / -5 = 7
+/- = - 12 / -4 = -3
-/+ = - -72 / 3 = -24

° Sustracción
(+) – (+) = + - (4) – (3) = 1
(-) – (-) = - + (-9) – (-25) = 16
(+) – (-) = + + (10) - (-10) = 20
(-) – (+) = - - se invierte el signo de él sustraendo y se aplica leyes (-14) - (16) = 30
de signos para la suma.

Ejemplos :

1) [-2+6-4+9] + [-7+10-12+13] - [-4+6-16] = [15-6]+[23-19]-[6-20] = [9]+[4]-[-14] =
9+4+14= **27**

2) [(-4+3-9+10)(6-10+25+4)] - [(-3+5+15-30)-(11+4-5)] = [(13-13)(35-10)]-[(20-33)-(15-5)] =
[(0)(25)]-[(-13)-(10)] = -[-13-10] = -[-23] = **23**

3) [(-2+4-16+20) $\div$ (-16+15+17-14)] + [(4+3-13)-(9+3)] = [(24-18)$\div$(32-30)] + [(7-13)-(12)] =
[(6) $\div$ (2)] + [-6-12] = [3] + [-18] = **-15**

OPERACIONES CON RACIONALES FRACCIONARIOS

SUMA

1) $\frac{3}{4}+\frac{6}{7}=\frac{21+24}{28}=\frac{45}{28}$

2) $3\frac{1}{2}+5\frac{7}{9}=\frac{7}{2}+\frac{52}{9}=\frac{63+104}{18}=\frac{167}{18}$

RESTA

1) $\frac{7}{5}-\frac{2}{3}=\frac{21-10}{15}=\frac{11}{15}$

2) $16\frac{1}{2}-4\frac{2}{3}=\frac{33}{2}-\frac{14}{3}=\frac{99-28}{6}=\frac{26}{27}$

PRODUCTO

$(4\ \frac{1}{3})(\frac{2}{9}) = (\frac{13}{3})(\frac{2}{9}) = \frac{26}{27}$

$(\frac{7}{8})(4) = \frac{28}{8}$

DIVISION

$\frac{3}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{9}{10}$

$\frac{7}{5} \div \frac{9}{8} = \frac{56}{45}$

DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

La descomposición de factores primos, consiste en la división de los números que se quieran descomponer entre los diferentes números primos.

32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

126	2
63	3
21	3
7	7
1	

304	2
152	2
76	2
38	2
19	19
1	

Para el 126 = $2 * 3^2 * 7$ y para el 304 = $2^4 * 19$.

Mínimo común múltiplo. Son el producto de los factores primos comunes que existen entre un par de números, una de las aplicaciones se encuentra en la obtención de él común denominador en los números racionales fraccionarios.

60	12	2
30	6	2
15	3	3
5	1	5
1		

El M.C.M es = $2^2 * 3 * 5 = 60$

16	42	2
8	21	2
4	7	2
2	1	2
1		3
		7

El M.C.M es $= 2^4 * 3 * 7 = 336$

El máximo común divisor.- Es el producto de los factores primos comunes de menor exponente.
El M.C.D de 20, 300 y 400 es:

20	2
10	2
5	5
1	

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

400	2
200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

$20 = 2^2 * 5$
$300 = 2^2 * 3 * 5^2$
$400 = 2^4 * 5^2$

Los factores primos comunes con menor exponente son: $2^2 * 5$ $\therefore$ el M.C.D es 20.

RAZONES Y PROPORCIONES

Una razón equivale a un cociente, relación ó división.
Una proporción es una igualdad entre dos razones, relaciones, cocientes ó divisiones.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

a_1 y b_2 Son los llamados extremos
a_2 y b_2 son los llamados medios

MEDIA PROPORCIONAL

$$\frac{2}{x} = \frac{x}{8}$$

$X^2 = 16$
$X = \pm\sqrt{16}$
$X = \pm 4$

TERCERA PROPORCIONAL O REGLA DE TRES

$2 \rightarrow 6$
$4 \rightarrow x$

$(2)(x) = (6)(4)$
$X = 24 / 2$
$X = 12$

TANTO POR CIENTO (Porcentajes)

Existen dos formas distintas de obtener el porcentaje de un numero determinado, las cuales son exactamente las mismas lo que cambia es la interpretación.
¿ Cuál es el 35% de 129?

1) Se realiza el producto del número por él porcentaje que se quiere obtener.

$$\begin{array}{r} 129 \\ \times\ 35 \\ \hline 645 \\ 387 \\ \hline 4515 \end{array}$$

2) El producto obtenido se divide entre 100.

$\frac{4515}{100} = 45.15$

3) El 35% de 129 es: 45.15

La Segunda Forma es:

¿ Cuál es el 43% de 536?

1) Se divide el valor de él porcentaje entre cien.
   $430 \div 100 = 0.43.$
2) El cociente se multiplica por él numero al cual corresponde el porcentaje.
   $536 * 0.43 = 230.48.$
3) El producto obtenido es el 43% de 536

LEYES DE LOS EXPONENTES

1) $a^n * a^m = a^{n+m}$ Ejemplos: $3^2 * 3^6 = 3^8$; $x^4 * x^{-1} = x^3$

2) $(a * b)^n = a^n b^n$ $(2 * 5)^3 = 2^3 * 5^3$; $(xy)^2 = x^2 y^2$

3) $(a / b)^n = a^n / b^n$ $(4 / 2)^2 = 4^2 / 2^2$; $(x / y)^3 = x^3 / y^3$

4) $(a^n)^m = a^{n*m}$ $(3^2)^5 = 3^{10}$; $(x^2)^4 = x^8$

5) $a^1 = a$ $3^1 = 3$; $x^1 = x$

6) $a^0 = 1$ $9^0 = 1$; $x^0 = 1$

7) $\dfrac{a^n}{a^m} \quad a^{n-m}$ $\dfrac{5^7}{5^3} = 5^4$; $\dfrac{x^4}{x^{-8}} = x^{4-(-8)} = x^{12}$

7') $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2}$; $x^{-4} = \dfrac{1}{x^4}$

8) $a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$ $3^{4/3} = \sqrt[3]{3^4}$ $x^{3/2} = \sqrt{x^3}$

ÁLGEBRA

Expresiones algebraicas.- Son cantidades que se representan por números constantes y por letras que también representan cantidades. Toda expresión algebraica debe contener los siguientes elementos:

exponente

$\pm \; a\,x^3$

signo

factor literal o variable

factor numérico o coeficiente

La expresión algebraica anterior es la más simple y es denominada término.

Términos semejantes.- Son aquellos que tienen él o los mismos factores literales y cada uno de ellos tiene respectivamente el mismo exponente.

Son términos semejantes: $3x^2y^2z$ y $-\frac{1}{3}y^2zx^2$

NO son términos semejantes: $-\frac{1}{2}a^2b^2c$ y $\frac{2}{5}ab^2c^2$

A D I C I Ó N O S U M A

5

La suma de expresiones algebraicas se obtiene agrupando los términos semejantes y reduciendo los coeficientes, poniendo mucha atención a los signos de cada término.
Ejemplo:

$$(3x^2 + 6x - 4 + 2xy) + (3 - 4x + 3yx - 9x^2) =$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 6x + 2xy - 4 \\ + \quad - 9x^2 - 4x + 3yx + 3 \\ \hline - 6x^2 + 2x + 5xy - 1 \end{array}$$

Si se tienen coeficientes fraccionarios el procedimiento es exactamente el mismo:

$$(\tfrac{1}{3}x^4 - \tfrac{2}{5} x + 6) + (- \tfrac{2}{3} + 4 x + \tfrac{1}{2} x^4) =$$

$$\begin{array}{r} + \quad \tfrac{1}{3} x^4 - \tfrac{2}{5} x + 6 \\ \tfrac{1}{2} x^4 + 4 x - \tfrac{2}{3} \\ \hline \tfrac{5}{6} x^4 + \tfrac{18}{5} x + \tfrac{16}{3} \end{array}$$

S U S T R A C C I Ó N O R E S T A

Se realiza la misma agrupación que para la suma, el cambio que presenta la sustracción es la inversión de signos en cada término del sustraendo.

$$(- 3 x + 6 x^2 - 9 x^3 + 6 x y) - (2 x^2 + 3x^3 - 9 x y + 3) =$$

$$(- 3 x + 6 x^2 - 9 x^3 + 6 x y) - 2 x^2 - 3x^3 + 9 x y - 3 =$$

$$\begin{array}{r} - 9 x^3 + 6 x^2 - 3 x + 6 x y \\ + \quad - 3 x^3 - 2 x^2 \qquad + 9 x y - 3 \\ \hline -12 x^3 + 4 x^2 - 3 x + 15 x y - 3 \end{array}$$

P R O D U C T O Ó MULTIPLICACIÓN.

Para el producto de expresiones algebraicas se utiliza la propiedad distributiva de los números reales; $a (b + c) = a b + a c$ y $a (b - c) = a b - a c$, es decir, se multiplica cada término del 1er factor por cada término del 2do factor, el producto realizado anteriormente tiene que implicar las leyes de los signos y las leyes de los exponentes.
Ejemplos:

$$(- 3 x + 6 - 4 x^2 - \tfrac{1}{2} y) (\tfrac{3}{2} x^2 + 3 x - \tfrac{1}{3}) =$$

$$= - \tfrac{9}{2} x^3 - 9 x^2 + x + 9 x^2 + 18 x - 2 - 6 x^4 - 12 x^3 + 4/3 x^2 - 3/4 yx^2 - 3/2 xy + 1/6 y =$$

$$= - 6 x^4 - 33/2 x^3 + 4/3 x^2 - 3/4 x^2y - 3/2 xy + 19 x + 1/6 y -2$$

Independientemente de él número de términos de ambos factores, el producto se realiza: cada término del primer factor por cada término del segundo factor.

Otro ejemplo:

$$(3x + 6y^2 - 2x^2) (- 2 + 6x^2 + 3x) =$$

$$= - 6x + 18x^3 + 9x - 12y^2 + 36x^2y^2 + 18xy^2 + 4x^2 - 12x^4 - 6x^3 =$$

$$= - 6x + 12x^3 - 12y^2 + 36x^2y^2 + 18xy^2 + 13x^2 - 12x^4 =$$

$$= - 12x^4 + 12x^3 + 36x^2y^2 + 13x^2 - 6x + 18xy^2 - 12y^2$$

P R O D U C T O S N O T A B L E S

1) $(a \pm b)^2 = (a \pm b) (a \pm b) = a^2 \pm ab \pm ba + b^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Binomio al cuadrado = Trinomio Cuadrado Perfecto

" El producto de un binomio al cuadrado es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo término, más el cuadrado del segundo término ".

Ejemplos:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(3x - 4)^2 = 9x^2 - 24x + 16$$
$$(x^2 + 5x)^2 = x^4 + 10x^3 + 25x^2$$

2) $(a + b) (a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$

Binomios conjugados = Diferencia de cuadrados

"El producto de binomios conjugados es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término".

Ejemplos:

$$(x + y) (x - y) = x^2 - y^2$$
$$(3x + 4) (3x - 4) = 9x^2 - 16$$
$$(2y^2 - 6) (2y^2 + 6) = 4y^4 - 36$$

3) $(a + b) (a + c) = a^2 + ac + ba + bc = a^2 + (b + c) a + bc$

Binomios con Término Común = Trinomio de 2^do grado o Cuadrático

"El producto de binomios con término común es igual al cuadrado del primer término, más el producto de la suma de los dos términos no comunes por el término común más el producto de los términos no comunes".

Ejemplos:

$$(x + 2) (x - 4) = x^2 - 2x - 8$$
$$(3x - 1) (3x + 6) = 9x^2 + 15x - 6$$
$$(6x^2 - 8) (6x^2 - 7) = 36x^4 - 90x^2 + 56$$

D I V I S I O N

Para la división de expresiones algebraicas, se requiere de la utilización de las leyes de los signos y de las leyes de los exponentes.

1er caso. Cuando el divisor es un monomio.

$$\frac{6x^2y - 4x^3y^3 + 18xy}{-\frac{3}{4}xy} = \frac{6x^2y}{-\frac{3}{4}xy} + \frac{-4x^3y^3}{-\frac{3}{4}xy} + \frac{+18xy}{-\frac{3}{4}xy} =$$

$$= -\frac{24}{3}x + \frac{16}{3}x^2y^2 - \frac{72}{3} = \frac{16}{3}x^2y^2 - 8x - 24$$

2^do caso. Cuando el divisor es un binomio.

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y} =$$

1) Sé reacomodan de mayor a menor exponente con respecto a una variable y se colocan dentro de una galera.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + xy + y^2 \\
\hline
x - y & x^3 \qquad\qquad - y^3 \\
 & \underline{- x^3 + x^2y} \\
 & + x^2y \\
 & \underline{- x^2y + xy^2} \\
 & + xy^2 - y^3 \\
 & \underline{- xy^2 + y^3} \\
 & 0 \quad 0
\end{array}
$$

2) Se divide él primer término del dividendo, entre él primer término del divisor.
3) El cociente se multiplica por cada término del divisor y se coloca en los términos semejantes del dividendo para reducir.
4) Se repiten el 2do y 3er paso para cada nuevo dividendo encontrado.

FACTORIZACION

La factorización como su nombre lo dice, es descomponer en factores primos un producto.

Para factorizar expresiones algebraicas comunes se tienen dos variantes, cuya utilización de pende de la forma de dichas expresiones.

1era Factorización por factor común.

Factorizar:

$6x^2y \;-\; 4x^3y^2z^2 \;+\; 16x^2y^2v$

Los factores literales comunes son "x" e "y" porque se encuentran en todos los términos de la expresión. Se toman los mínimos exponentes de cada uno de esos factores literales comunes.

El factor numérico común o máximo común divisor de los coeficientes es dos, por lo tanto se coloca junto con el factor común literal.

$$2x^2y\ (3 - 2xyz^2 + 8yv)$$

2da Factorización por agrupación.

Teniéndose:

$$ax + by + ay + bx$$

Como no se tiene un factor común para todos los términos de la expresión se agrupan aquellos términos que si tienen factor común y sé factoriza:

$$ax + bx + ay + by$$
$$x(a + b) + y(a + b)$$

Como la expresión obtenida es un binomio que tiene un factor común, que es $(a + b)$ sé factoriza nuevamente:

$$(a + b)(x + y)$$

Ejemplo:

$$x^2 + 5x + 4x + 20$$
$$(x^2 + 5x) + (4x + 20)$$
$$x(x + 5) + 4(x + 5)$$
$$(x + 5)(x + 4)$$

FACTORIZACION DE PRODUCTOS NOTABLES

Trinomio Cuadrado Perfecto.- Un trinomio es cuadrado perfecto si el doble producto de las raíces de los extremos produce el término lineal o medio. Por lo tanto para factorizarlo únicamente se colocan las raíces en un paréntesis con el signo del término lineal, y el conjunto elevado al cuadrado.

Teniéndose : $\qquad x^2 + 10x + 25$

Aplicando el criterio anterior:

1) Las raíces de los extremos son: x y 5 respectivamente.
2) El doble producto de las raíces es: $2(5x) = 10x$
3) Podemos decir que el trinomio es cuadrado perfecto, por lo tanto la factorización es:

$$(x+5)^2 \quad ó \quad (x+5)(x+5)$$

Otro ejemplo:

Teniendo: $49y^2 - 42y + 9$

1) Las raíces son: $7y$ *y* 3
2) El doble producto es: $2(7y * 3) = 2(21y) = 42y$
3) De aquí se observa que es T.C.P por lo tanto:

$$(7y - 3)^2 \quad ó \quad (7y - 3)(7y - 3)$$

Trinomio de 2do grado o cuadrático.

1er caso.- Un trinomio es cuadrático cuando NO cumple el criterio anterior, por lo tanto se buscaran dos números que sumados proporcionen el coeficiente del término lineal incluyendo el signo y multiplicados el término constante también incluyendo su signo. Para encontrarlos más fácilmente se descompone en factores primos el número resultante del producto y se forman pares de números con los factores.

Teniéndose: $x^2 + 9x + 20$

$$(\ ) + (\ ) = 9$$
$$(\ )\ (\ ) = 20$$

Descomponiendo en factores primos se tiene:

$$\begin{array}{r|l}
20 & 2 \\
10 & 2 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
2 \text{ y } 10 \\
\\
4 \text{ y } 5
\end{array}$$

Los números que buscamos son 4 y 5 ambos positivos y como el coeficiente del término cuadrático es 1, se obtiene la raíz de dicho término y se coloca en dos paréntesis con los números encontrados, es decir:

$$(x+4)(x+5)$$

obteniendo así la factorización del trinomio.

2do Caso.- Cuando el coeficiente del término cuadrático es diferente de uno, se multiplica dicho coeficiente y el término independiente, para después encontrar dos números que sumados proporcionen el coeficiente del término lineal y multiplicados el producto obtenido anteriormente. Terminado el proceso se siguen los pasos del primer caso.

Dado: $9x^2 - 15x - 14$

$$(\ ) + (\ ) = -15$$
$$(\ )\ (\ ) = -126$$

por lo tanto:

$$\begin{array}{r|l}
126 & 2 \\
63 & 3 \\
21 & 3 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
6 \text{ y } 21 \\
\\
9 \text{ y } 14 \\
\\
2 \text{ y } 63
\end{array}$$

9

Los números que se buscan son el 6 y el –21, por lo tanto se colocan los números anteriores en el trinomio considerándolos como coeficientes de términos lineales quedando:

$$9x^2 + 6x - 21x - 14$$

Factorizando por agrupación la expresión obtenida:

$$(9x^2 + 6x) - (21x - 14)$$
$$3x(3x + 2) - 7(3x + 2)$$
$$(3x + 2)(3x - 7)$$

Siendo la última expresión el resultado de la factorización.

ECUACIONES

Una ecuación es siempre una igualdad entre dos cantidades, de las cuales se desconoce uno o más parámetros llamados variables.

ECUACIONES DE 1ER GRADO.

Se llama así a las igualdades en donde el parámetro desconocido tiene como máximo exponente la unidad. De aquí se deduce que el número de soluciones o raíces de una ecuación es igual al mayor exponente de cada variable; en este caso el número de soluciones es uno.

La resolución de ecuaciones es bastante simple, si se aplican los siguientes pasos.

Dada: $4x + 6 - \frac{1}{2}x + 4 = 3x - 19 + 20x - \frac{1}{2}$

1) Se colocan todos los términos que contengan a la variable en el lado izquierdo de la ecuación, mejor conocido como primer miembro. Se debe recordar que al pasar un término de un miembro a otro, si en un inicio se encuentra sumando, al pasar al otro miembro pasará restando y viceversa.

$$4x - \frac{1}{2}x - 3x - 20x + 6 + 4 = -19 - \frac{1}{2}$$

2) Se colocan todos los términos independientes o constantes en el segundo miembro de la ecuación (lado derecho de la igualdad), siguiendo el mismo criterio de operaciones que para el primer paso.

$$4x - \frac{1}{2}x - 3x - 20x = -19 - \frac{1}{2} - 6 - 4$$

3) Se realizan reducciones de términos en ambos miembros de la ecuación.

$$\frac{-39}{2}x = \frac{-59}{2}$$

4) Se despeja a la variable considerando que el coeficiente está multiplicándola y por lo tanto pasará dividiendo a todo el segundo miembro.

$$x = \frac{-59/2}{-39/2} = \frac{-59}{-39} = \frac{59}{39}$$

Siendo $x = 59 / 39$, el valor que cumple la igualdad inicial si se sustituyera.

SISTEMAS DE ECUACIONES O ECUACIONES SIMULTANEAS

Teniendo:

$$3x + 6y - 14 = 0 \quad \text{--------------------} (1)$$
$$x - 2y - 20 = 0 \quad \text{--------------------} (2)$$

Los métodos para resolverlas son:

- Eliminación por { Reducción o Suma y/o resta. / Igualación. / Sustitución.
- Método de los Determinantes.

Para resolver el sistema de ecuaciones planteado por el método de reducción o suma y resta se debe:

1) Se igualan los términos variables, con los términos constantes. El objetivo de este método es igualar los coeficientes de la variable que se quiere eliminar, buscando con la igualación que queden también con diferente signo dichos coeficientes (esto se logra multiplicando o dividiendo cualquiera o ambas ecuaciones por un valor determinado).

En este caso, se multiplicará la ecuación (2) por "-3" , quedando:

$$-3x + 6y = -60 \quad \text{-------------------} \quad (2')$$

2) Sumar término a termino las ecuaciones, tanto en el primer como en el segundo miembro.

$$\begin{array}{rl} & 3x + 6y = 14 \quad \text{--------------------} \ (1) \\ + & \\ & \underline{-3x + 6y = -60} \quad \text{--------------------} \ (2') \\ & 0 + 12y = -46 \end{array}$$

3) Despejar el valor obtenido de una de las variables.

$$y = -\frac{46}{12}$$

$$y = -\frac{23}{6}$$

4) Sustituir el valor de la variable encontrada en cualquiera de las ecuaciones iniciales y despejar el valor de la segunda variable.

$$3x + 6\left(-\frac{23}{6}\right) = 14$$

$$3x - 23 = 14$$

$$3x = 14 + 23$$

$$3x = 37$$

$$x = \frac{37}{3}$$

5) Si los valores encontrados son correctos, al sustituir ambos en las ecuaciones iniciales, ambas igualdades se deben de cumplir.

Para resolver el sistema de ecuaciones inicial por el método de sustitución se tiene que:

1) Se igualan los términos constantes con el resto de las ecuaciones quedando:

$$3x + 6y = 14 \quad \text{---------------} \quad (1)$$

$$x - 2y = 20 \quad \text{---------------} \quad (2)$$

2) Se escoge una variable de una de las ecuaciones y se despeja.

Despejando "x" de la ecuación (2) se tendrá:

$$x = 20 + 2y \quad \text{---------------} \quad (A)$$

3) Sustituir el valor de " x " en la otra ecuación:

$$3(20 + 2y) + 6y = 14$$

Resolviendo la ecuación de primer grado con una variable resultante se tiene:

$$60 + 6y + 6y = 14$$

$$12y = 14 - 60$$

$$12y = -46$$

$$y = -\frac{46}{12}$$

$$y = -\frac{23}{6}$$

Sustituyendo el valor obtenido para " y " en (A) :

$$x = 20 + 2\left(-\frac{23}{6}\right)$$

$$x = 20 - \frac{23}{3} \quad \therefore \quad x = \frac{37}{3}$$

METODO DE LOS DETERMINANTES

Determinante.- Es un arreglo de números en renglones y columnas.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

D. secundaria D. primaria

El resultado de un determinante es el producto de los números en la diagonal primaria menos el producto de los números de la diagonal secundaria.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 20 = -2$$

Para aplicar este concepto a los sistemas de ecuaciones se forma un determinante principal de la siguiente forma:

$$3x - 4y = 12 \quad \text{----------} (1)$$
$$x + 2y = 10 \quad \text{----------} (2)$$

$$\begin{array}{cc} \text{coef. } x & \text{coef. } y \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - (-4) = 6 + 4 = 10$$

Posteriormente se forma un determinante para "x"

$$\begin{array}{cc} \text{ctes.} & \text{coef. } y \end{array}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} = 24 - (-40) = 24 + 40 = 64$$

Se forma un determinante para "y"

$$\begin{array}{cc} \text{coef. } x & \text{ctes} \end{array}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 30 - 12 = 18$$

Para encontrar x se aplica:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{64}{10} = 6.4$$

Para encontrar y se aplica:

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{18}{10} = 1.8$$

12

ECUACIONES DE 2^{DO} GRADO.

Las ecuaciones completas de 2^{do} grado tienen la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde:

ax^2: Término cuadrático.
bx: Término lineal.
c: Término constante o independiente.

Se pueden tener ecuaciones incompletas de la forma:

$ax^2 + bx = 0$
$ax^2 + c = 0$

En todos los casos se pueden resolver por medio de la fórmula cuadrática o fórmula general la cual tiene la forma:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo:

$$4x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(4)(-4)}}{2(4)} = \frac{2 \pm \sqrt{4+64}}{8} = \frac{2 \pm \sqrt{68}}{8} =$$

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{68}}{8} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{2-\sqrt{68}}{8}$$

Se encuentran dos valores para la misma variable dado el grado de la ecuación.

Las ecuaciones de segundo grado pueden resolverse por factorización por el método de complemento del cuadrado perfecto que se muestra a continuación:

Teniendo: $x^2 + 8x - 2 = 0$

1) Se coloca en el 2^{do} miembro el término constante. $X^2 + 8x = 2$

2) Se extrae la mitad del término lineal y se eleva al cuadrado, agregando a ambos miembros el número obtenido. $X^2 + 8x + 16 = 2 + 16$

3) Sé factoriza el T.C.P del 1^{er} miembro y se reduce la expresión ubicada en el 2^{do} miembro.

$$(x + 4)^2 = 18$$

4) Se despeja la variable. $x + 4 = \pm\sqrt{18}$

$$x = -4 \pm \sqrt{18}$$

$$x_1 = -4 + \sqrt{18} \qquad x_2 = -4 - \sqrt{18}$$

DESIGUALDADES O INECUACIONES

Las desigualdades o inecuaciones son aquellas expresiones que proporcionan la relación entre dos cantidades, en las cuales existe cierta diferencia, y además se desconoce un parámetro llamada variable o incógnita. A pesar de que la metodología para resolver las desigualdades es prácticamente la misma que para las ecuaciones, hay que aclarar que cuando un término negativo se encuentra multiplicando o dividiendo en alguno de los miembros de la desigualdad pasa al otro miembro con la operación inversa, pero el signo de la desigualdad se invierte.

Es decir:

$$3x + 5 - 2x + 6 \ \rangle\ 3x + 2 + 7x$$
$$3x - 2x - 3x - 7x \ \rangle\ 2 - 5 - 6$$
$$-9x \ \rangle\ -9$$
$$x \ \langle\ \frac{-9}{-9}$$
$$x \ \langle\ 1$$

El resultado de una desigualdad no es un solo valor, es mas bien un "intervalo" de valores, que no es otra cosa que un conjunto de valores que poseen ciertas propiedades. En nuestro caso el intervalo de valores que hace cierta la desigualdad es todo el conjunto de números menores que la unidad.

En el caso que estamos manejando el intervalo de valores que cumplen la desigualdad son todos los números reales menores a uno.

Otro ejemplo:

$$\frac{3x+2}{4} + 2x \ \rangle\ 2\,(2x - 4) + 5x$$
$$\tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{2} + 2x \ \rangle\ 4x - 8 + 5x$$
$$\tfrac{3}{4}x + 2x - 4x - 5x \ \rangle\ -8 - \tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{3}{4}x - 7x \ \rangle\ -\frac{17}{2}$$
$$-\frac{25}{4}x \ \rangle\ -\frac{17}{2}$$
$$x \ \langle\ \frac{-\frac{17}{2}}{-\frac{25}{4}}$$
$$x \ \langle\ \frac{28}{25}$$
$$x \ \langle\ 1.12$$

En las inecuaciones o desigualdades también nos podemos encontrar con sistemas o inecuaciones simultaneas, en este caso dichos sistemas consisten en inecuaciones que poseen soluciones comunes, por ejemplo, teniendo el sistema:

$$2x - 4 \ \rangle\ 6 \quad \text{---------------------} \ (1)$$
$$3x + 5 \ \rangle\ 14 \quad \text{---------------------} \ (2)$$

Resolviendo la desigualdad (1) tendremos que:

$$2x - 4 \ \rangle\ 6$$
$$2x \ \rangle\ 6 + 4$$
$$2x \ \rangle\ 10$$
$$x \ \rangle\ \frac{10}{2}$$
$$x \ \rangle\ 5$$

Resolviendo la desigualdad (2) tendremos que:

$$3x + 5 \ \rangle\ 14$$
$$3x \ \rangle\ 14 - 5$$
$$3x \ \rangle\ 9$$
$$x \ \rangle\ \frac{9}{3}$$
$$x \ \rangle\ 3$$

14

Los resultados anteriores implican que los valores que hacen ciertas ambas desigualdades son todos aquellos mayores que cinco, ya que todos los valores que cinco también son mayores que tres.

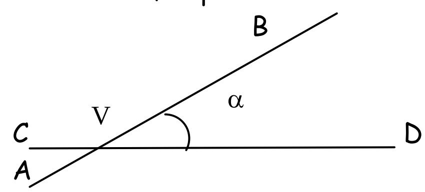
GEOMETRIA EUCLIDEANA Y TRIGONOMETRIA

Geometría.- Es la parte de la matemática que tiene por objeto el estudio de las propiedades de las formas o figuras.

Para estudiar la geometría necesitamos conocer ciertos conceptos, los cuales se presentan a continuación.

Recta.- Es el conjunto de puntos que se extiende sin límite en ambos sentidos.

Ángulo.- Es la figura formada por todos los puntos de dos rayos distintos que emanan del mismo origen. Otra definición es: Un ángulo es la apertura o espacio formado entre la intersección de dos segmentos de recta; el punto de intersección es el vértice.

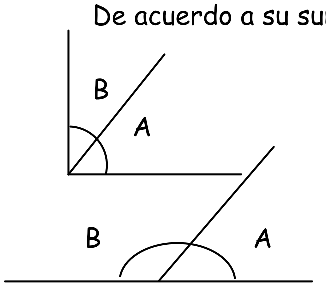


CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS.

De acuerdo a su apertura:

$\angle$ s menores de 90° : Ángulos agudos.
$\angle$ s iguales a 90° : Ángulos rectos.
$\angle$ s mayores de 90° y menores de 180° : Ángulos obtusos.
$\angle$ s iguales a 180° : Ángulos Llanos.
$\angle$ s iguales a 360° : Ángulos Perigonales.

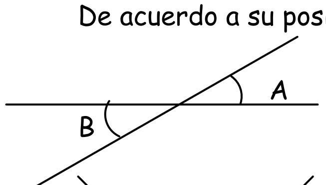
De acuerdo a su suma:



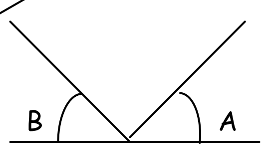
Cuando A + B = 90° se dice que A y B son COMPLEMENTARIOS.

Cuando A + B = 180° se dice que A y B son SUPLEMENTARIOS.

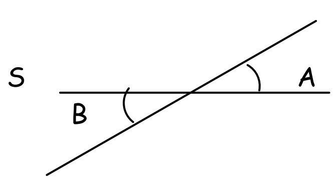
De acuerdo a su posición:



A y B son opuestos por el vértice.



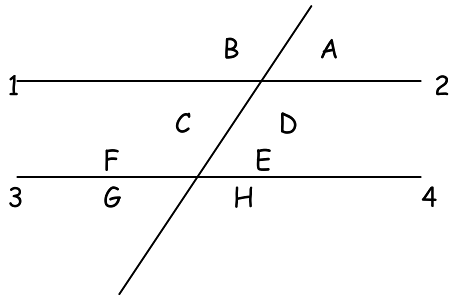
A y B son colineales.



A y B son alternos con respecto a la recta S.

15

Ángulos entre rectas paralelas interceptadas por una secante u oblicua.



Se tienen:

Ángulos alternos externos

A y G $\therefore$ A = G

B y H   B = H

Ángulos Iguales

A = E   B = F

D = H   C = G

Ángulos alternos internos

C y E $\therefore$ C = E

D y F   D = F

T R I A N G U L O S

El triángulo es un polígono de tres lados y tres ángulos cuyo perímetro es: $L_1 + L_2 + L_3$ y de área: (b * h) / 2.

Cuando:

$L_1 = L_2 = L_3$ es un triángulo Equilátero.
$L_1 = L_2 \neq L_3$ es un triángulo Isósceles.
$L_1 \neq L_2 \neq L_3$ es un triángulo Escaleno.

Cuando en un triángulo:

$\angle s < 90°$ $\Rightarrow$ Triángulo Acutángulo.
$1 \angle = 90°$ $\Rightarrow$ Triángulo Rectángulo.
$1 \angle > 90°$ $\Rightarrow$ Triángulo Obtusángulo.

Propiedades de los triángulos.

1.- La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a 180°.
2.- En todo triángulo, a lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa. Dichos ángulos y lados se llaman homólogos.
3.- En un triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que la diferencia.
4.- En un triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo y viceversa.
5.- En todo triángulo equilátero, los tres ángulos son iguales y cada uno vale 60°.
6.- En todo triángulo un ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores que no le son adyacentes.
7.- En todo triángulo la suma de los ángulos exteriores es igual a 360°.
8.- En todo triángulo rectángulo, los ángulos agudos son complementarios y la hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos.
9.- Todo triángulo que tiene dos ángulos iguales es isósceles.
10.- En todo triángulo isósceles, los ángulos contiguos a la base son iguales.

16

CONGRUENCIA Y SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Congruencia.- Un triángulo es congruente o igual a otro, si tiene todos sus lados y ángulos respectivamente iguales a los lados y ángulos del otro triángulo.

Postulados de Congruencia (igualdad).

Postulado L – A – L.- Dos triángulos que tienen dos lados iguales y el ángulo comprendido entre ellos también igual, son congruentes.

Postulado A – L – A.- Dos triángulos que tienen dos ángulos respectivamente iguales y el lado comprendido entre ellos también igual, son congruentes.

Postulado L – L – L.- Dos triángulos que tienen los tres lados respectivamente iguales son congruentes.

Postulados de Semejanza.

Postulado A – A.- Dos triángulos son semejantes, si tienen dos ángulos respectivamente iguales.

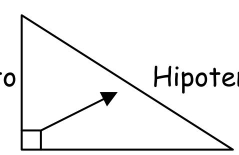
Postulado L – A – L.- Dos triángulos son semejantes, si tienen un ángulo respectivamente igual y proporcionales los lados que los forman.

Postulado L – L –L.- Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados respectivamente proporcionales.

ANÁLISIS DE LOS TRIÁNGULOS.

Triángulos Rectángulos.

Cateto



Hipotenusa

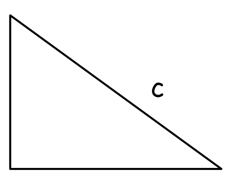
Cateto

Teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$

" El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos ".

a



c

b

$$A + B + C = 180°$$

" La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a 180° ".

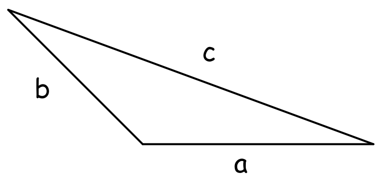
Funciones Trigonométricas.- Son aquellas reglas de correspondencia que relacionan los lados con los ángulos en un triángulo Rectángulo.

$$\text{Seno} = \frac{Cat.\_opuesto}{Hipotenusa} \qquad \text{Cotangente} = \frac{Cat.\_adyacente}{Cat.\_opuesto}$$

$$\text{Coseno} = \frac{Cat.\_adyacente}{Hipotenusa} \qquad \text{Secante} = \frac{Hipotenusa}{Cat.\_adyacente}$$

$$\text{Tangente} = \frac{Cat.\_opuesto}{Cat.\_adyacente} \qquad \text{Cosecante} = \frac{Hipotenusa}{Cat.\_opuesto}$$

Triángulos Oblicuángulos.- Son aquellos triángulos acutángulos y obtusángulos.



$$A + B + C = 180°$$

Ley de Senos.

$$\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{Sen } B} = \frac{c}{\text{Sen } C}$$

Ley de Cosenos.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{ Cos } C$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb \text{ Cos } A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \text{ Cos } B$$

VALORES ESPECIALES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

θ grados	θ radianes	Sen θ	Cos θ	Tang θ	Cot θ	Sec θ	Csc θ
0°	0	0	1	0	-	1	-
30°	$\pi / 6$	$1 / 2$	$\sqrt{3} / 2$	$1 / \sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$2 / \sqrt{3}$	2
45°	$\pi / 4$	$\sqrt{2} / 2$	$\sqrt{2} / 2$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\pi / 3$	$\sqrt{3} / 2$	$1 / 2$	$\sqrt{3}$	$1 / \sqrt{3}$	2	$2 / \sqrt{3}$
90°	$\pi / 2$	1	0	-	0	-	1

IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

Identidades de Recíprocos.

Sen A * Csc A = 1

Cos A * Sec A = 1

Tang A * Cotg A = 1

Identidades de División.

Sen A

Cos A

18

$$\text{Tang } A = \frac{\qquad}{\text{Cos } A} \qquad\qquad \text{Cotg } A = \frac{\qquad}{\text{Sen } A}$$

Identidades de Cuadrados.

$\text{Sen}^2 A + \text{Cos}^2 A = 1$ $\qquad$ $\text{Csc}^2 A = 1 + \text{Cotg}^2 A$

$\text{Sec}^2 A = 1 + \text{Tang}^2 A$

Identidades de Suma y Diferencia de dos Ángulos.

$\text{Sen } (A \pm B) = \text{Sen } A \ \text{Cos } B \pm \text{Sen } A \ \text{Cos } B$

$\text{Cos } (A \pm B) = \text{Cos } A \ \text{Cos } B \qquad \text{Sen } A \ \text{Sen } B$

$$\text{Tang } (A \pm B) = \frac{\text{Tang } A \pm \text{Tang } B}{1 \qquad \text{Tang } A \ \text{Tang } B}$$

Identidades del Doble de un Ángulo

$\text{Sen } 2A = 2 \text{ Sen } A \ \text{Cos } A$

$\text{Cos } 2A = \text{Cos}^2 A - \text{Sen}^2 A = 1 - 2 \text{ Sen}^2 A = 2 \text{ Cos}^2 A - 1$

$$\text{Tang } 2A = \frac{2 \ \text{Tang } A}{1 - \text{Tang}^2 A}$$

Otras Identidades Importantes.

$$\text{Sen}^2 A = \frac{1 - \text{Cos } 2A}{2}$$

$$\text{Cos}^2 A = \frac{1 + \text{Cos } 2A}{2}$$

ECUACIONES TRIGONOMETRICAS

Una ecuación trigonométrica es una igualdad entre expresiones de un mismo ángulo que solo se satisface para determinado valor o valores de ángulo. No hay que confundir una ecuación trigonométrica con una igualdad trigonométrica, ya que la ecuación se cumple únicamente para determinados valores y la igualdad para cualquier valor de ángulo.

No existen métodos generales para la solución de ecuaciones trigonométricas, en muchos casos esto depende de la agudeza y la experiencia de la persona, pero puede empezarse por transformar la ecuación trigonométrica en alguna otra equivalente más sencilla y luego resolver por los procesos algebraicos correspondientes.

Por ejemplo:

$\text{Sen } (x) - 2 \text{ Sen } (x) \ \text{Cos } (x) = 0$ $\qquad$ para

Primero factoricemos el factor común Sen (x) :

$$\text{Sen } (x) \ [\, 1 - 2 \text{ Cos } (x) \,] = 0$$

De la expresión anterior se puede observar que se cumple la igualdad cuando alguno de los dos factores sea cero de lo que se puede deducir que:

Si $\quad \text{Sen}(x) = 0 \quad$ entonces $x = 0$ y/o $x = \pi$

y $\quad 1 - 2\,\text{Cos}(x) = 0 \quad$ entonces $\text{Cos}(x) = \frac{1}{2}$ lo que implica que $x = \frac{\pi}{3}$ y/o $x = \frac{5}{3}\pi$

por lo tanto las soluciones buscadas para $0 \le x < 2\pi$ son:

$$x = 0 \,,\ \frac{\pi}{3} \,,\ \pi \ \text{y}\ \frac{5}{3}\pi$$

Se puede verificar si los valores son ciertos si se sustituyen en la ecuación original uno por uno.

POLÍGONOS

Polígono.- Es la porción de un plano, que se encuentra limitado por líneas rectas, llamadas lados.

Clasificación.

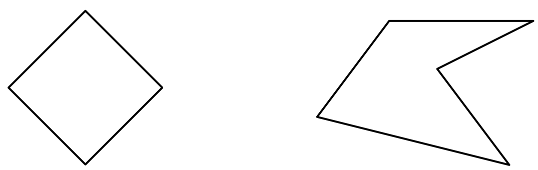
De acuerdo al número de lados.

3 lados $\longrightarrow$ Triángulo.
4 lados $\longrightarrow$ Cuadrilátero.
5 lados $\longrightarrow$ Pentágono.
6 lados $\longrightarrow$ Hexágono.
7 lados $\longrightarrow$ Heptágono.
8 lados $\longrightarrow$ Octágono.
9 lados $\longrightarrow$ Eneágono.
10 lados $\longrightarrow$ Decágono.

Pueden ser:

Convexos.- Si todos sus ángulos interiores son menores de 180°.

Cóncavos.- Si tiene por lo menos un ángulo interior mayor de 180°.



Convexo Cóncavo

También se clasifican en:

- Equilátero.- Todos sus lados iguales.
- Equiángulo.- Todos sus ángulos iguales.
- Regular.- Es a la vez equilátero y equiángulo.
- Irregular.- Cuando No cumple lo anterior.

Propiedades.

Perímetro.- Es la suma de las medidas de sus lados.

Diagonal.- Es el segmento de recta que une un vértice con otro vértice no consecutivo.

Vértice.- Punto de unión de dos lados.

Apotema (En un polígono regular).- Es el segmento de recta perpendicular trazada desde el centro del polígono a uno de sus lados.

Teoremas.

"La suma de los ángulos interiores de un polígono, es igual a: $S_{int} = 180\,(n - 2)$".

"La suma de los ángulos exteriores de un polígono es igual a 360° ".

"El número de diagonales de un polígono de n lados es igual a:

$$D = \frac{n * (n - 3)}{2} \qquad n = \text{número de lados.}$$

CIRCUNFERENCIA Y CIRCULO.

Circunferencia.- Es una curva plana y cerrada, cuyos puntos equidistan de un punto interior llamado centro.

Círculo.- Es la superficie plana limitada por la circunferencia.

Rectas y Puntos Importantes.

O Centro.

OR (Radio).- Recta que une al centro con un punto cualquiera de la circunferencia.

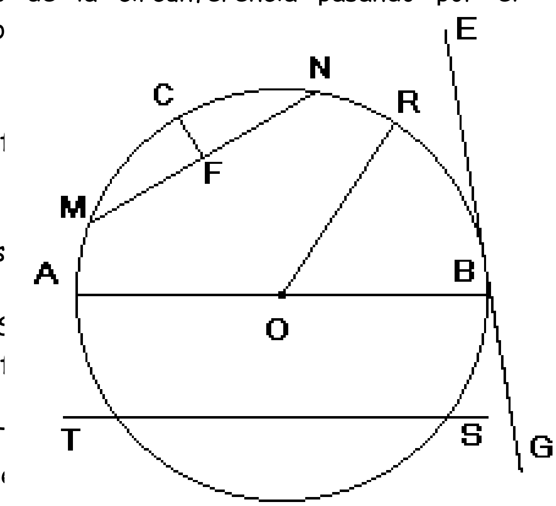
AB (Diámetro).- Es la recta que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro

MCN circun

MN (puntos

TS (S circun

EG (T punto



B (Punto de Tangencia).- Es el punto donde la tangente toca a la circunferencia.

CF (Flecha).- Es la parte de radio, perpendicular en el punto medio de una cuerda, comprendida entre está y el arco.

21

LOGARITMOS.

Los logaritmos se definen como:

Si " a " es un número positivo (> 0) distinto de 1 y " x " es un número real en la ecuación $a^x = y$; entonces " x " es llamado el logaritmo de " y " en base " a ".

Es decir:

$$a^x = y$$
$$x = \log_a y$$

El LOGARITMO de un NUMERO " y " es el exponente al que hay que elevar la base " a " para obtener el valor " y ".

Esto implica que se puede llevar una función exponencial a una función logarítmica y viceversa, por ejemplo:

$$5^3 = 125$$
$$\log_5 125 = 3$$

Existen dos tipos básicos de logaritmos, los llamados logaritmos de BRIGGS, comunes, vulgares o decimales y los llamados logaritmos de NEPER o logaritmos naturales, ambos tipos siguen la misma definición de logaritmo, la diferencia es la base que se toma para cada uno de ellos, en el primer caso la base de la potencia es 10 y en el segundo caso es el número e, el cual tiene un valor de 2.71828182..., a continuación se presentan las leyes que rigen las operaciones con logaritmos.

LEYES DE LOS LOGARITMOS

1) $\log_c (a\,b) = \log_c a + \log_c b$
2) $\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$
3) $\log_c a^n = n \log_c a$
4) $\log_c \sqrt[n]{a} = \log_c a / n$
5) $\log_c 10 = 1$ sí $c = 10$
6) $\log_c 1 = 0$

Ejemplo:

La expresión $\log \left[\frac{x^2 z}{y^3} \right]$ es equivalente a:

Para esta expresión, primero se aplica la ley número 2, quedando la expresión:

$$\log \left[\frac{x^2 z}{y^3} \right] = \log (x^2 z) - \log (y^3)$$

Aplicando la ley número 1, al primer término del segundo miembro de la ecuación anterior obtenemos:

$$\log \left[\frac{x^2 z}{y^3} \right] = \log x^2 + \log z - \log y^3$$

Aplicando por último la ley número 3, la expresión equivalente sería:

$$\log \left[\frac{x^2 z}{y^3} \right] = 2 \log x + \log z - 3 \log y$$

Una de las aplicaciones más importantes de estas reglas de los logaritmos son las ecuaciones exponenciales y/o logarítmicas, por ejemplo:

Resolver: $4^{x-1} = 8^{x+1}$

Aplicando logaritmo a ambos miembros de la ecuación, y la ley número tres:

$$\log(4^{x-1}) = \log(8^{x+1})$$
$$(x-1)\log 4 = (x+1)\log 8$$

Manipulando algebraicamente y realizando operaciones se tendrá:

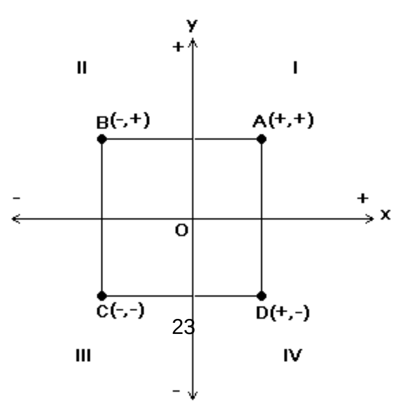
$$x - 1 = (x+1)\frac{\log 8}{\log 4}$$
$$x - 1 = (x+1)\frac{0.9031}{0.6021}$$
$$x - 1 = (x+1)(1.5)$$
$$x - 1 = 1.5x + 1.5$$
$$x - 1.5x = 1.5 + 1$$
$$-0.5x = 2.5$$
$$x = \frac{2.5}{-0.5}$$
$$x = -5$$

Por lo tanto el valor de "x" que hace cierta la ecuación es : x = -5.

GEOMETRÍA ANALÍTICA

La geometría analítica es la rama de la matemática, que conjuga y une a él álgebra y a la geometría plana, es una de las áreas que tiene la mayor aplicabilidad y la mayor importancia ya que en esta se fundamenta el cálculo y sus diferentes aplicaciones.

La principal herramienta de la geometría analítica es el plano cartesiano, el cual se conoce mas formalmente como sistema de coordenadas rectangulares, este sistema esta formado como sabemos, de un par de rectas numéricas que se interceptan en un punto llamado origen y son perpendiculares entre sí, lo que da lugar a la formación de los llamados ejes cartesianos los cuales se conocen como eje x (o eje de las abcisas) y eje y (o eje de las ordenadas), estas condiciones forman también los llamados cuadrantes los cuales se numeran como muestra la siguiente figura, se muestra también el sentido de cada uno de los ejes coordenados, y los signos de un punto representativo localizado en cada cuadrante.



De la figura anterior se puede observar que se puede representar un punto por medio de un par ordenado de números que representaran las unidades sobre el eje x y las unidades sobre el eje y que se deben tomar para localizar un punto en particular, lo cual implica que podemos representar lugares geométricos a partir de números y ecuaciones, que es donde radica uno de los objetivos de la geometría analítica, el otro objetivo es teniéndose las ecuaciones y números obtener el tipo de lugar geométrico al que están representando.

LA RECTA.

La recta es el primer lugar geométrico que se trata en la geometría analítica, no hay una definición precisa de lo que es una recta y por lo tanto se tomará entonces la definición intuitiva que se manejo en el apartado de geometría plana, complementariamente a eso una recta se puede definir a partir de las propiedades que cumplen los puntos que la forman de lo cual se deduce que una recta se puede representar si se cumplen dos condiciones:

1. Si se conocen dos puntos que la forman o por los cuales pase.
2. Si se conoce un punto y su inclinación o pendiente con respecto a la horizontal.

Las siguientes relaciones nos darán la forma de representar una ecuación en diferentes circunstancias y con diferentes datos, pero siempre cumpliendo las dos condiciones anteriores.

Distancia entre dos puntos.

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Punto medio de un segmento.

$$Pm = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Pendiente de una recta.

$$m = \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ecuación cartesiana de la recta o ecuación de la recta teniendo dos puntos.

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ecuación Punto – Pendiente de la recta.

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

Ecuación General de la recta.

$$Ax + By + C = 0$$

Ecuación Pendiente – Ordenada al origen

$$y = mx + b$$

Paralelismo

$$m_1 = m_2$$

Perpendicularidad

$$m_1 * m_2 = -1$$

Ángulo entre Dos Rectas

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 * m_1}$$

Distancia de un Punto a una Recta.

$$D = \frac{A x_1 + B y_1 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

LA CIRCUNFERENCIA

La definición de la circunferencia es exactamente la misma que para la geometría plana, la s siguientes relaciones proporcionan la interpretación analítica de este lugar geométrico

Ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en el origen.
(Fig. 1).

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad c(0,0)$$

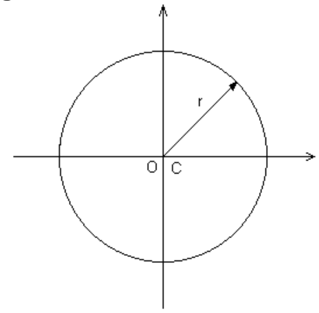


Fig. 1

Ecuación ordinaria de la circunferencia con centro fuera del origen.
(Fig. 2)

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad c(h,k)$$

Ecuación general de la circunferencia.

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Como se observa una circunferencia estará definida si se conoce su centro y su radio, independientemente de la localización de su centro si se analiza detenidamente, se podrá ver que ambas ecuaciones de la circunferencia, con centro dentro y fuera del origen son las mismas.

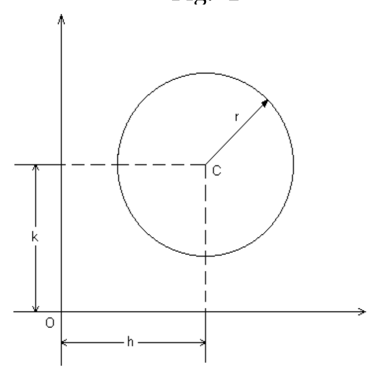
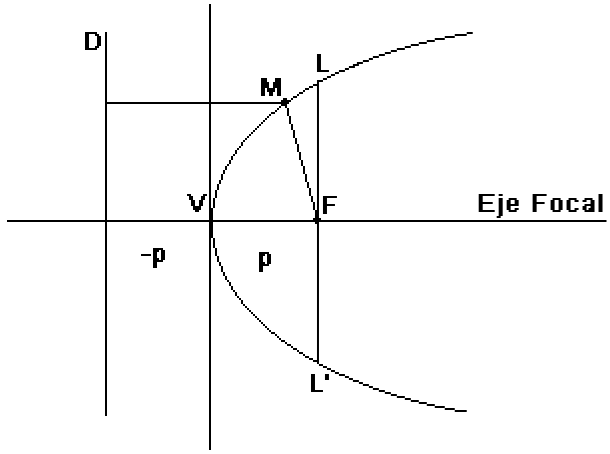


Fig. 2

LA PARABOLA.

La parábola forma parte de un conjunto de lugares geométricos llamado secciones cónicas, el cual está formado por la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola.

La parábola se define formalmente como el lugar geométrico formado por el conjunto de puntos que equidista de un punto fijo llamado foco (F) y una recta fija llamada directriz (D), en la figura 3, se muestran los elementos de una parábola.



V : **Vértice** **LL'** : **Lado Recto**
F : **Foco** **D** : **Directriz**
p : **Paràmetro**

Fig. 3

Las siguientes son relaciones que proporcionan las diferentes representaciones analíticas de la parábola.

$x^2 = \pm 4py$ Parábola vertical $V(0,0)$ y $F(0, \pm p)$ (Fig. 4)

$y^2 = \pm 4px$ Parábola horizontal $V(0,0)$ y $F(\pm p, 0)$ (Fig. 5)

$(x - h)^2 = \pm 4p(y - k)$ Parábola vertical $V(h, k)$ y $F(h, k + p)$ (Fig. 6)

$(y - k)^2 = \pm 4p(x - h)$ Parábola horizontal $V(h, k)$ y $F(h + p, k)$ (Fig. 7)

$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$

Ecuación general de la parábola.

$Cy^2 + Ey + Dx + F = 0$

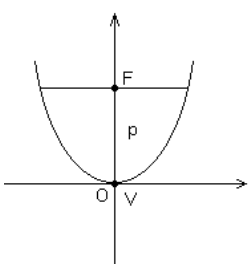


Fig. 4

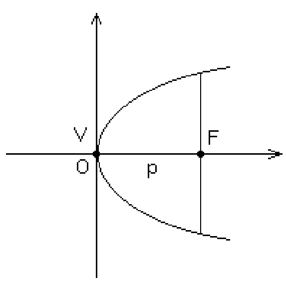


Fig. 5

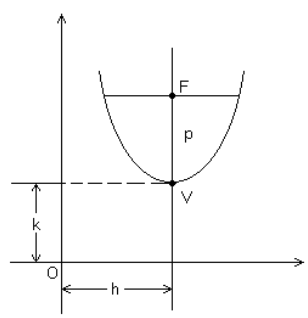


Fig. 6

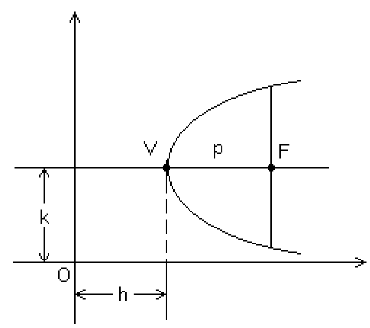


Fig. 7

Para todas las condiciones anteriores el valor del lado recto es: LR = $|4p|$ y la ecuación de la directriz se puede obtener a partir de las coordenadas del foco y la orientación del eje focal sabiendo que la directriz será perpendicular a dicho eje.

Al igual que los dos lugares geométricos anteriores, para definir este lugar geométrico se deben conocer dos de sus parámetros, los cuales para la parábola pueden ser el vértice y el foco, el vértice y el parámetro ó el foco y el parámetro.

LA ELIPSE

La elipse es otro lugar geométrico de las llamadas cónicas, y se define formalmente como: "El lugar geométrico formado por el conjunto de puntos en un plano, cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante".
La definición anterior así como los elementos de una elipse se presentan en la figura 8.

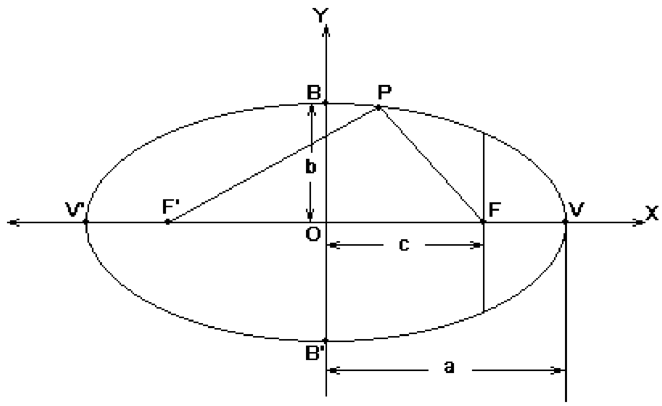


Fig. 8

La suma de los segmentos PF y PF' es a los que hace referencia la definición, algebraicamente se tiene:

PF + PF' = 2 a

De la figura:

O es el centro de la elipse

V y V' son los vértices del eje mayor.

B y B' son los vértices del eje menor.

F y F' son los focos

Existe un parámetro que se debe tomar en cuenta para las elipses e hipérbolas, aunque también implica a la circunferencia y a la parábola, dicho parámetro es la excentricidad, que indica el grado de redondez que posee la sección cónica de la que sé este hablando.

Las siguientes son las ecuaciones de una elipse en sus diferentes orientaciones.

Elipse Horizontal con centro en el origen. (Fig. 9)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$a > b$

$e = \frac{c}{a}$

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$LR = \left| \frac{2b^2}{a} \right|$

C (0 , 0)

F (c , 0)   F' (-c , 0)

V (a , 0)   V' (-a , 0)

B (0 , b)   B' (0 , -b)

Elipse Vertical con centro en el origen. (Fig. 10)

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

C (0 , 0)

F (0 , c)   F' (0 , -c)

V (0 , a)   V' (0 , -a)

B (b , 0)   B' (-b , 0)

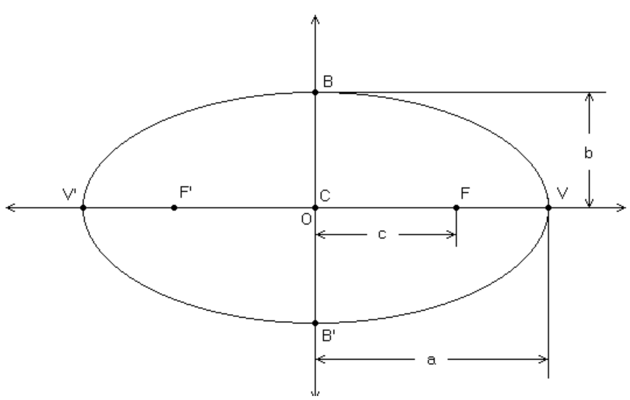


Fig. 9

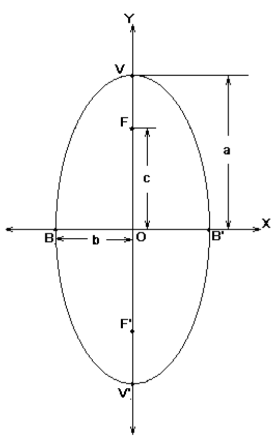


Fig. 10

27

Elipse Horizontal con centro fuera del origen. (Fig. 11)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

a > b

C (h , k)

e = $\frac{c}{a}$

F (h + c , k) F' (h - c , k)

c = $\sqrt{a^2-b^2}$

V (h + a , k) V' (h - a , k)

LR = | $\frac{2b^2}{a}$ |

B (h , k + b) B' (h , k - b)

Elipse Vertical con centro fuera del origen. (Fig. 12)

C (h , k)

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

F (h , k + c) F' (h , k - c)

V (h , k + a) V' (h , k - a)

B (h + b , k) B' (h - b , k)

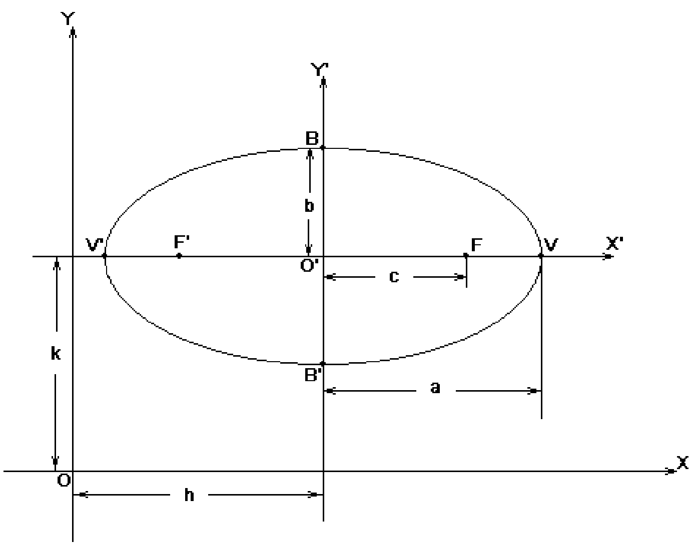


Fig. 11

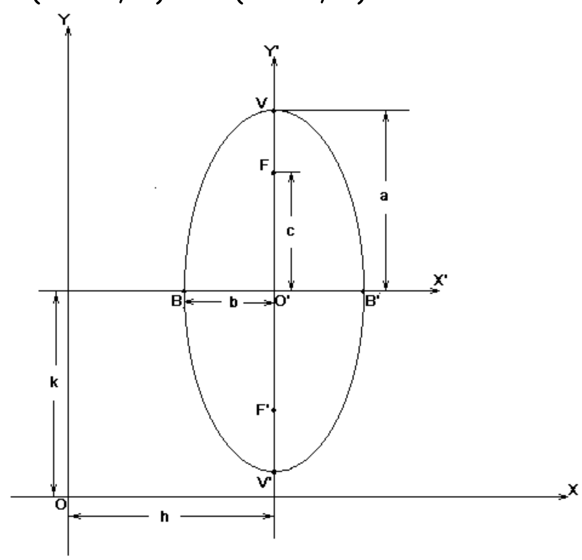


Fig. 12

Para la elipse también de debe conocer ciertos elementos para poder representarla analíticamente, los parámetros pueden ser el centro y los vértices (del eje mayor y del eje menor); el centro, un foco y uno de los vértices ó el centro, un foco y la excentricidad, etc.

Una ecuación de la forma:

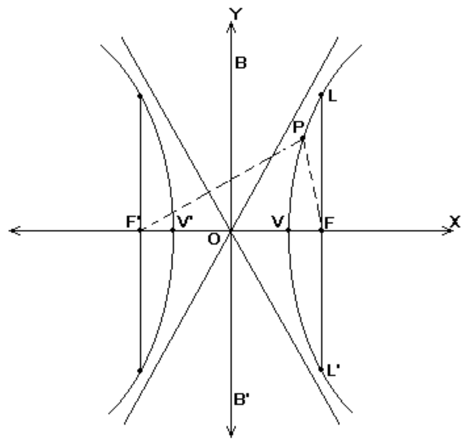
$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

representará una elipse con ejes paralelos a los ejes cartesianos si los coeficientes A y C son diferentes pero con el mismo signo. Esta ecuación se conoce como *ecuación general de la elipse.*

LA HIPERBOLA

28

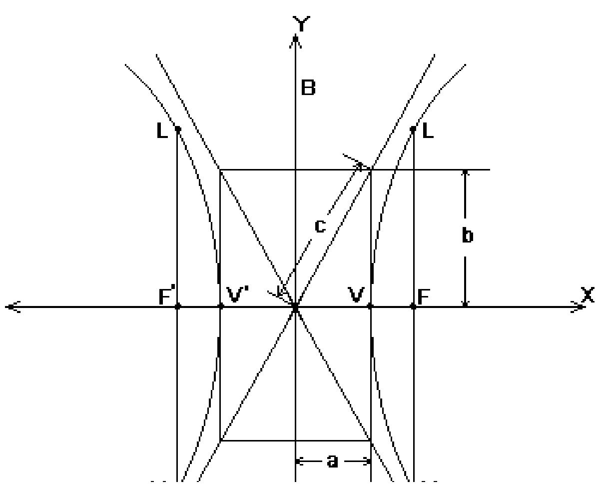
La hipérbola se define como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante. Matemáticamente se define como: PF' - PF = 2 a; la curva tiene como características ser abierta y ser formada por dos ramas, al igual que la parábola y la elipse, la hipérbola es simétrica. En la siguiente figura se muestran los elementos de la hipérbola.



PF y PF': Radios focales
FF': Distancia focal y se toma FF'=2c
O: Origen del sistema
LL': Lado recto
VV': Eje focal, real o transverso, cuya longitud es VV'=2a
BB': Eje conjugado o imaginario, no corta la curva y BB'=2b

Las siguientes son las relaciones que proporcionan las ecuaciones de la hipérbola en sus diferentes orientaciones:

Hipérbola horizontal con centro en el origen.



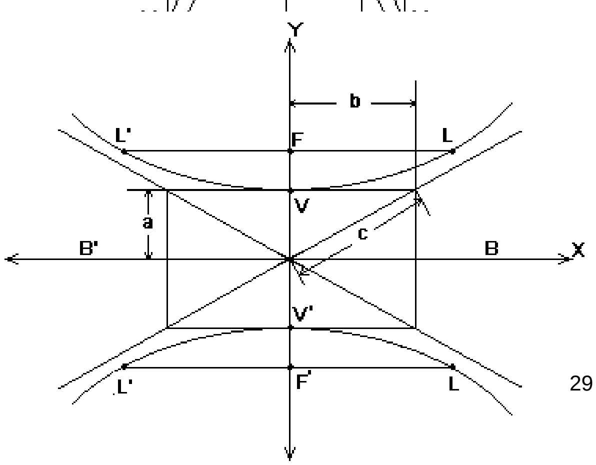
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

F (c . 0) F' (-c , 0)

V (a , 0) V' (-a , 0)

$c^2 = a^2 + b^2$ LL' = $\frac{2b^2}{a}$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ ec. Asíntotas: $y = \pm\frac{b}{a}x$



Hipérbola vertical con centro en el origen.

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

29

F (0 . c) F' (0 , -c)

V (0 , a) V' (0 , -a)

$c^2 = a^2 + b^2$ LL' = $\frac{2b^2}{a}$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ ec. Asíntotas: $y = \pm\frac{a}{b}x$

La hipérbola al igual que los lugares geométricos anteriores puede ser trasladada a un centro fuera del origen, con coordenadas C(h , k) y al igual que estos la variación en sus ecuaciones se obtiene tomando en cuenta el corrimiento horizontal y vertical que sufre el lugar geométrico, el cambio de cada uno de sus elementos se puede deducir fácilmente, las ecuaciones ordinarias quedaran en la forma:

Para la hipérbola horizontal

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Para la hipérbola vertical

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

La *ecuación general* que representa una hipérbola con ejes paralelos a los ejes cartesianos es:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en donde los coeficientes A y C deben ser de diferente signo.

Como podemos notar, los lugares geométricos cuyas ecuaciones están expresados por ecuaciones de 2do grado, tienen una forma o ecuación general muy similar la cual si se generaliza esta dada por la expresión:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

la cual es precisamente la ecuación general de las cónicas, la ecuación particularizada para cada una de ellas ya se mostró, pero existe otro criterio para saber a partir de una ecuación general de que tipo de lugar geométrico se trata, dicho criterio implica la evaluación del discriminante o indicador: $B^2 - 4AC$; el criterio es el siguiente:

Sí $B^2 - 4AC \langle\ 0 \Rightarrow$ la ecuación representa una elipse.

Sí $B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow$ la ecuación representa una parábola.

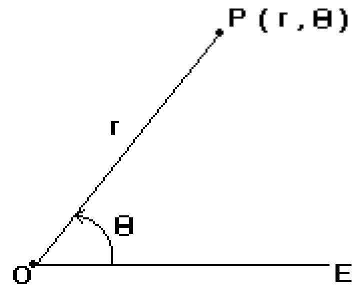
Sí $B^2 - 4AC \rangle\ 0 \Rightarrow$ la ecuación representa una hipérbola.

Con este criterio es posible identificar más fácilmente el lugar geométrico que se está analizando y poder aplicar las relaciones correspondientes.

COORDENADAS POLARES

Este es otro sistema de coordenadas por medio del cual se puede fijar la posición de un punto o lugar geométrico sobre un plano, dicho sistema está formado por un eje fijo llamado eje polar, el cual inicia en el origen o polo del sistema.

La ubicación de un punto estará dada a través de la distancia existente entre el polo y el punto que se este manejando (llamado radio vector), y por medio del ángulo formado por el radio vector y el eje polar, gráficamente:



El sentido del ángulo θ es el convencional, es decir, positivo en el sentido contrario al giro de las manecillas del reloj (anti-horario), el radio vector también puede ser positivo o negativo, el sentido lo dará también el sentido convencional, hacia la derecha positivo y hacia la izquierda negativo.

La relación existente entre las coordenadas polares y las rectangulares se da por medio de las siguientes relaciones:

$x = r\cos\theta$, $y = rsen\theta$ y $r^2 = x^2 + y^2$

las expresiones anteriores se pueden deducir fácilmente si se hace coincidir el origen del plano cartesiano con el origen o polo del sistema polar y obteniendo la abscisa y ordenada del punto P.

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.

Función.- Es una regla de correspondencia unívoca (uno a uno) entre los elementos de dos conjuntos.

Variable independiente.- Es aquella a la cual se le asigna valores arbitrariamente.

Variable dependiente.- Es aquella en la cual el valor de la misma, depende del valor asignado a la variable independiente y de la regla de correspondencia entre las dos variables.

Clasificación de las funciones.

- Constantes.
- Algebraicas.
- Trascendentes:
    * Exponenciales.
    * Logarítmicas.
    * Trigonométricas.

Función explícita.- Este tipo de función explica claramente la regla de correspondencia entre la variable dependiente y la variable independiente.

Función implícita.- De una misma expresión se pueden deducir dos reglas de correspondencia o más.

$y = f(x) = x + 3$	$3x + 4y = 6$
función explícita	función implícita

Concepto de Límite.

Límite.- Se dice que la variable *V* tiende a la constante *L* como límite, cuando los valores sucesivos de *V* son tales que el valor numérico de la diferencias *V* – *L* puede llegar a ser, finalmente, menor que cualquier número positivo predeterminado tan pequeño como se quiera.

$$\text{Lím } z = a$$

$v \to l$

" El límite de z, cuando v tiende a l, es a ".

Teoremas sobre límites.

1) $\lim\limits_{x\to a} k = k$

2) $\lim\limits_{x\to a} x = a$

3) $\lim\limits_{x\to a} ku = k\lim\limits_{x\to a} u$

4) $\lim\limits_{x\to a}(u+v+w) = A+B-C$

5) $\lim\limits_{x\to a}(u*v*w) = A*B*C$

6) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{A}{B}$ si $B \neq 0$

7) $\lim\limits_{x\to a} u^n = \left(\lim\limits_{x\to a} u\right)^n$

8) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{u} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} u}$

El cálculo de límites es sencillo, solo hay que evaluar la variable de la función en el valor hacia el cual tiende dicha variable y realizar las reducciones correspondientes, en algunos casos nos encontraremos con formas indeterminadas como $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, las cuales se pueden resolver por medio de operaciones algebraicas simples, por medio de factorizaciones, por medio de racionalizaciones, etcétera.

DERIVACIÓN

Derivada.- La derivada, coeficiente diferencial o función derivada de una función es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando éste tiende a cero. Simbólicamente:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

La notación que se utiliza para expresar la derivación es variada pero tenemos principalmente que la derivada se expresa de las siguientes formas:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}f(x) = D_x y = D_x f(x) = y' = f'(x)$$

La derivada se puede interpretar de diferente manera como por ejemplo puede representar una razón de cambio, la pendiente de una recta y la velocidad de un cuerpo.

El derivar una función es realizar la transformación de dicha función en otra más simple, la manera en que se hacen estas transformaciones depende de la forma de la función original, a continuación se presentan las reglas de derivación más importantes y comunes:

Reglas de derivación.

1) f' (c) = 0
2) f' (x) = 1
3) f' (u + v – w) = f'(u) + f'(v) - f'(w)
4) f' (c v) = c f'(v)
5) f' (u v) = u f'(v) + v f'(u)
6) f' (v^n) = n v^{n-1}
7) f'(u / v) = (v f'(u) - u f'(v)) / v^2
8) f'(ln v) = 1/v (f'(v))
9) f'(a^v) = a^v ln a f'(v)
10) f'(e^v) = e^v f'(v)
11) f'(sen v) = cos v f'(v)
12) f'(cos v) = - sen v f'(v)
13) f'(tan v) = sec^2 v f'(v)

Ejemplo:

Dada la $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 6x + 13$, hallar su derivada.

1.- Si observamos la función que nos están proporcionando, está formada por una suma de cuatro funciones, la primera cúbica, la siguiente cuadrática, la tercera lineal y la última constante, lo que implica que se debe aplicar la regla de derivación número tres.

$$f'(x) = f'(2x^3) + f'(4x^2) - f'(6x) + f'(13)$$

2.- Ahora vemos que las tres primeras funciones son multiplicadas por una constante por lo cual se aplica la regla cuatro, observemos que la ultima función es una constante por lo tanto se aplica la regla uno.

$$f'(x) = 2f'(x^3) + 4f'(x^2) - 6f'(x) + 0$$

3.- Se obtiene la derivada de las dos primeras funciones por medio de la regla seis, para la tercera función se aplica la regla dos.

$$f'(x) = 2(3x^2) + 4(2x) - 6(1)$$

4.- Se realizan los productos indicados y la expresión resultante es la derivada solicitada.

$$f'(x) = 6x^2 + 8x - 6$$

Otro ejemplo:

Hallar la derivada de $f(x) = \dfrac{3x^2 - 8}{2x + 5}$

1.- Esta función esta formada por una división y un producto de funciones, primero obtendremos la derivada de cada función como en el ejemplo anterior.

$$f'(3x^2 - 8) = 6x \quad \text{y} \quad f'(2x + 5) = 2$$

2.- Ya teniendo la derivada de cada una de las funciones que intervienen en la función original aplicaremos la regla siete.

$$f'(x) = \frac{(2x+5)(6x) - (3x^2 - 8)(2)}{(2x+5)^2}$$

3.- Se realizan las operaciones indicadas y se reduce obteniendo así la derivada de la función.

$$f'(x) = \frac{16 + 42x - 6x^2}{(2x+5)^2}$$

Aplicaciones de la derivada.

Método de máximos y mínimos.

1ero.- Hallar la primera derivada de la función.

2do.- Igualar a cero la primera derivada y resolver la ecuación.

3ero.- Hallar la segunda derivada.

4ta .- Sustituir en la segunda derivada, en lugar de la variable, cada uno de los valores críticos obtenidos. Sí el resultado es negativo, la función tiene un máximo para este valor crítico; si el resultado es positivo, la función tiene un mínimo.

INTEGRACIÓN

La integración indefinida es la operación inversa a la diferenciación, en otras palabras la integración es la antiderivación de las funciones obtenidas en la diferenciación, por lo tanto también se tienen reglas para integrar funciones, las reglas para las integrales indefinidas se muestran a continuación:

1.- $\int adu = a\int du$

2.- $\int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw$

3.- $\int dx = x + c$

4.- $\int v^n dv = \dfrac{v^{n+1}}{n+1} + c$

5.- $\int \dfrac{dv}{v} = \ln v + c$

6.- $\int a^v dv = \dfrac{a^v}{\ln a} + c$

7.- $\int e^v dv = e^v + c$

8.- $\int senvdv = -\cos v + c$

9.- $\int \cos vdv = senv + c$

10.- $\int \sec^2 vdv = \tan gv + c$

11.- $\int \csc^2 vdv = -ctgv + c$

12.- $\int (\sec v)(tgv)dv = \sec v + c$

13.- $\int (\csc v)(ctgv)dv = -\csc v + c$

14.- $\int (tgv)dv = -\ln\cos v + c = \ln\sec v + c$

15.- $\int (ctgv)dv = \ln senv + c$

16.- $\int (\sec v)dv = \ln(\sec v + tgv) + c$

17.- $\int (\csc v)dv = \ln(\csc v - ctgv) + c$

Ejemplo:

Hallar la integral $\int (2x^3 - 5x^2 - 3x + 4)dx$

1. Se observa que la expresión esta formada por una suma algebraica de diferenciales, lo que implica que se debe aplicar la regla de integración número dos.
$$\int (2x^3 - 5x^2 - 3x + 4)dx = \int 2x^3dx - \int 5x^2dx - \int 3xdx + \int 4dx$$
2. Para las integrales obtenidas se observa que hay un producto de constantes con diferenciales, por lo cual se deduce la aplicación de la regla uno.
$$\int (2x^3 - 5x^2 - 3x + 4)dx = 2\int x^3dx - 5\int x^2dx - 3\int xdx + 4\int dx$$
3. El siguiente paso será la aplicación de las reglas cuatro y tres.
$$\int (2x^3 - 5x^2 - 3x + 4)dx = 2\left[\frac{x^4}{4}\right] - 5\left[\frac{x^3}{3}\right] - 3\left[\frac{x^2}{2}\right] + 4[x] + c$$
4. Realizando las reducciones correspondientes se obtendrá la integral requerida.
$$\int (2x^3 - 5x^2 - 3x + 4)dx = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + c$$

La letra c que se ha estado incluyendo tanto en las reglas de integración inmediata como en el ejemplo anterior es la llamada constante de integración, esta constante representa el valor por medio del cual se puede obtener una familia de curvas o funciones que solo sé diferencían entre sí a través de dicha constante.

INTEGRAL DEFINIDA

Si *f* es una función definida en un intervalo cerrado [a , b], y sea P una partición de [a , b] con divisiones en x_0, x_1, ..., x_n, en donde cada una de esas divisiones se encuentra dentro del intervalo, entonces la integral definida de *f* de *a* a *b* es:

$$\int_a^b f(x) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

sí este limite existe. Si existe, entonces se dice que f es integrable en el intervalo [a,b].

El planteamiento anterior es la definición formal de una integral definida, para nuestros fines esta definición es hasta cierto punto irrelevante, con la ayuda del teorema fundamental del cálculo la evaluación de una integral definida se reduce a:

Si *f* es continua en [a , b], entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

en donde *F* es cualquier antiderivada de *f*, es decir, *F'* = *f*.

La expresión anterior nos indica que para obtener la integral definida de una función o diferencial, simplemente se debe obtener la integral inmediata o antiderivada de la función y posteriormente obtener el valor de la diferencia de la integral inmediata evaluada en el limite superior menos la integral inmediata evaluada en el limite inferior.

La integral definida nos proporciona como resultado un número o valor constante por lo cual no depende de una variable en particular, se puede utilizar cualquier variable al evaluar una integral definida sin alterar el valor de la integral, dadas estas condiciones, a la variable asignada al evaluar una integral definida en particular, se le conoce como variable ficticia, si una integral definida es positiva, entonces dicha integral puede interpretarse como un área.

Ejemplo:

Calcular: $\displaystyle\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}dt.$

1.- Antes de tratar de evaluar la integral observemos que se puede reducir algebraicamente él integrando, quedando:

$$\int_1^9 2 + t^{\frac{1}{2}} - t^{-2}dt$$

La reducción se hizo dividiendo cada termino del numerador del integrando entre él denominador.

2.- Ya reducido él integrando se obtiene la integral inmediata para él mismo, quedando la expresión:

$$\int_1^9 2 + t^{\frac{1}{2}} - t^{-2}dt = 2t + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{t}\Bigg]_1^9$$

3.- Evaluando la expresión anterior en los limites tendremos:

$$\int_1^9 2 + t^{\frac{1}{2}} - t^{-2}dt = \left[2(9) + \frac{2}{3}(9)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{(9)}\right] - \left[2(1) + \frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{(1)}\right] = 32\frac{4}{9}$$

él cual es el valor solicitado.

La integral definida puede tener diferentes aplicaciones o interpretaciones entre las cuales se encuentran el área bajo una función o entre dos funciones, puede interpretarse como el volumen de un cuerpo, como el área de un sólido en revolución, como el trabajo realizado por un cuerpo o para encontrar la longitud de un arco.