FÓRMULAS DE FÍSICA

TEMAS:
Análisis dimensional
Vectores
Cinemática

1

Fórmulas y ejemplos

Carlos Jimenez Huaranga

1

ECUACIONES DIMENSIONALES

Magnitud.- Es todo aquello que se puede medir.
Magnitudes fundamentales.- Son aquellas que sirven como base para expresar las demás magnitudes.
Magnitudes derivadas.- son aquellas que se expresan en función de las magnitudes fundamentales.
De acuerdo al Sistema Internacional de Unidades (S.I.), las magnitudes fundamentales son:

Longitud (L)	metro (m)
Masa (M)	kilogramo (kg)
Tiempo (T)	segundo (s)
Temperatura termodinámica (Θ)	kelvin (K)
Intensidad de corriente eléctrica (I)	ampere (A)
Intensidad luminosa (J)	candela (cd)
Cantidad de sustancia (N)	mol (mol)

Principales ecuaciones dimensionales

Área	$[A]=L^2$	Trabajo	$[W]=ML^2T^{-2}$
Volumen	$[V]=L^3$	Potencia	$[P]=ML^2T^{-3}$
Densidad	$[D]=ML^{-3}$	Energía	$[E]=ML^2T^{-2}$
Velocidad	$[v]=LT^{-1}$	Calor	$[Q]=ML^2T^{-2}$
Aceleración	$[a]=LT^{-2}$	Frecuencia	$[f]=T^{-1}$
Fuerza	$[F]=MLT^{-2}$	Presión	$[p]=ML^{-1}T^{-2}$
Impulso	$[I]=MLT^{-1}$	Carga eléctrica	$[q]=IT$

Todos los números, ángulos, funciones trigonométricas, logaritmos y constantes numéricas se denominan ADIMENSIONALES, y en las operaciones se les reeemplaza por la unidad.

Ejemplo:

$[5] = 1$ $\quad$ $[3\ L] = L$

$[53^o] = 1$ $\quad$ $[5\ L^2] = L^2$

$[\text{sen}37^o] = 1$ $\quad$ $[6\ L\ \text{sen}30^o] = L$

$[\text{Log}\ 2] = 1$ $\quad$ $[2\ L^{\text{sen}30^o}] = L^{1/2}$

Ejemplo: Determinar la ecuación dimensional de "E":

$$E=\frac{2mg}{A\ \text{Sen}37º}$$

Donde: m: masa; A: área; g: aceleración

$$[E] = \frac{1\cdot M\cdot LT^{-2}}{L^2} = M\cdot L\cdot L^{-2}\cdot T^{-2} \rightarrow [E] = ML^{-1}T^{-2}$$

La ecuación dimensional de "E" corresponde a la presión. Su unidad se denomina: pascal (Pa)

2

PRINCIPIO DE HOMOGENEIDAD

Para que la siguiente ecuación: $A + B - C = D$
Sea homogénea, se debe cumplir: $[A] = [B] = [C] = [D]$

Ejemplo: Si la siguiente ecuación es homogénea y "A" representa área, calcular la ecuación dimensional de B y C

$$2A + 5B^2 = C\ \text{sen}30^\circ$$

Los números "2", "5" y la función trigonométrica son adimensionales, luego, podemos reemplazarlos por la unidad.

$[2] = [5] = [\text{sen}30^\circ] = 1$

Luego: $A + B^2 = C \rightarrow [A] = [B^2] = [C]$

Como: $[A] = L^2 \rightarrow [B^2] = L^2 \rightarrow [B] = L$

También: $[A] = [C] \rightarrow [C] = L^2$

Podemos concluir que "B" representa longitud y "C" representa área.

Ejemplo: Si la siguiente ecuación es dimensionalmente homogénea, determinar los valores de: x; y ; z

$$5P\ \text{Cos}53^\circ = 3m^x\ (H-h)^{2y}\ t^z\ \text{Log}2$$

Donde: P: peso; m: masa; h y H: alturas; t: tiempo

$[5]=[\text{Cos}53^\circ]=[3]=[\text{Log}2]=1$

$[P]=[\text{Peso}]=[\text{Fuerza}]=MLT^{-2}$

$[h]=[H]=[\text{altura}]=L \rightarrow [H-h]=[L-L]=L$

$[t]=[\text{tiempo}]=T$

Reemplaza en la ecuación: $MLT^{-2} = M^x L^{2y} T^z$

Luego: $M^1=M^x \rightarrow x=1$

$L^1=L^{2y} \rightarrow y=0{,}5$

$T^{-2}=T^z \rightarrow z=-2$

Ejemplo: En un nuevo sistema de unidades, la magnitudes fundamentales son: velocidad (C), masa (J) y altura (H). Determina la ecuación dimensional de la fuerza en este nuevo sistema.

$[\text{velocidad}]=C=LT^{-1}$; $[\text{masa}]=J=M$; $[\text{altura}]=H=L$

Luego: $C=LT^{-1}=HT^{-1} \rightarrow T=HC^{-1}$

La ecuación dimensional de la fuerza es: $[F]=MLT^{-2}$

Reemplazando: $[F]=J\cdot H\cdot(HC^{-1})^{-2}=J\cdot H\cdot H^{-2}\cdot C^2$

Finalmente: $[F]=C^2JH^{-1}$

3

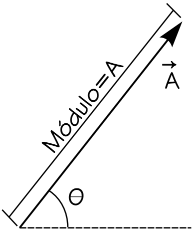
VECTORES

Vector, es una representación matemática de las magnitudes vectoriales, que presenta:

*MÓDULO.- o magnitud (A), expresa el tamaño del vector.

*DIRECCIÓN.- es la línea de acción donde se encuentra el vector.

*SENTIDO.- indica, hacia donde está dirigido el vector.



Una forma práctica de expresar la dirección y el sentido del vector, es expresando el valor del ángulo que forma el vector con la horizontal (θ).

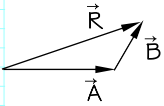
SUMA DE VECTORES

Al sumar dos o más vectores, se obtiene otro vector, denominado:

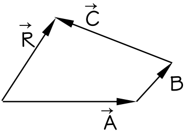
$$\boxed{\vec{R} = \text{Vector resultante}}$$

MÉTODO DEL POLÍGONO

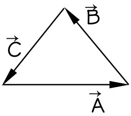
Coloca a los vectores uno a continuación de otro. el origen del vector resultante coincide con el origen del primer vector y su extremo coincide con el extremo del último vector.



$$\boxed{\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}}$$

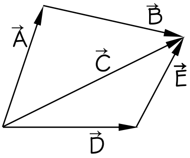


$$\boxed{\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}}$$



$$\boxed{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=\vec{0}}$$

Ejemplo: calcular la resultante de los siguientes vectores.



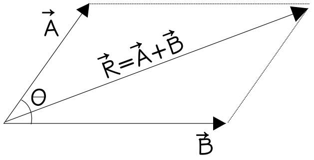
Nos piden: $\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}+\vec{E}$ ... (1)

De la figura se observa que: $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$; $\vec{C}=\vec{D}+\vec{E}$

En la ecuación (1): $\vec{R}=\vec{C}+\vec{C}+\vec{C}$

Finalmente: $\vec{R}=3\vec{C}$

MÉTODO DEL PARALELOGRAMO

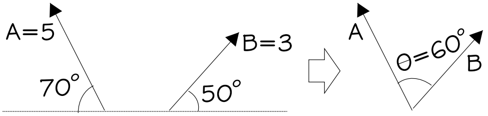


$$\boxed{\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}}$$

Módulo del vector resultante:

$$\boxed{R=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}}$$

Ejemplo: Calcular el módulo del vector resultante de los siguientes vectores.



Para averiguar el ángulo que forman los vectores, acerca los vectores el uno al otro y observarás que forman 60°.

Usa la ecuación: $R=\sqrt{A^2+B^2+2AB\,\mathrm{Cos}\theta}$

Reemplaza los datos: $R=\sqrt{5^2+3^2+2\cdot5\cdot3\cdot\mathrm{Cos}60^\circ}$

Efectuando las operaciones: $R=7$

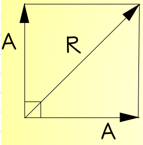
La mínima resultante que se puede obtener con dos vectores, A y B es cuando formen 0° y la máxima resultante se obtiene cuando formen 180°.

$$R_{Mín}=A-B \text{ y } R_{Máx}=A+B$$

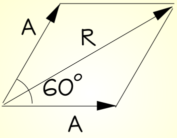
El módulo de toda resultante de dos vectores, se encuentra en el siguiente intervalo:

$$\boxed{A-B \leqslant R \leqslant A+B}$$

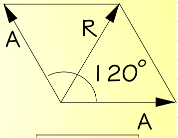
Casos particulares:



$$\boxed{R = A\sqrt{2}}$$



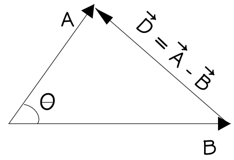
$$\boxed{R = A\sqrt{3}}$$



$$\boxed{R = A}$$

RESTA DE VECTORES

$D = |\vec{A} - \vec{B}| = |\vec{B} - \vec{A}|$

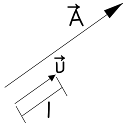


Módulo de la resta:

$$\boxed{D = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}}$$

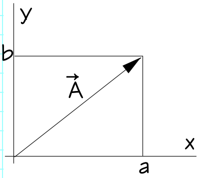
VECTOR UNITARIO

Es aquel vector cuyo módulo es igual a uno(1). El vector unitario de un vector A, es igual a:



$$\boxed{\vec{u} = \frac{\vec{A}}{A}} \qquad \boxed{\vec{A} = A\,\vec{u}}$$

VECTOR EN EL PLANO



$\vec{A} = (a;\ b)$

$\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j}$

Donde: $\vec{i}$; $\vec{j}$ son vectores unitarios

El módulo del vector $\vec{A}$ es:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

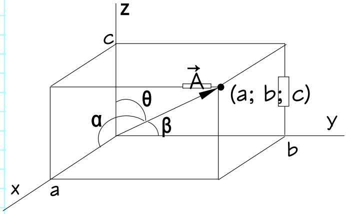
Ejemplo: Si: $\vec{A} = (5;\ 6)$ y $\vec{B} = (1;\ 2)$

Calcular: $|\vec{A}+\vec{B}|$ y $|\vec{A}-\vec{B}|$

$\vec{A}+\vec{B} = (5+1; 6+2) = (6;8) \rightarrow |A+B| = \sqrt{6^2+8^2} = 10$

$\vec{A}-\vec{B} = (5-1; 6-2) = (4;\ 4) \rightarrow |A-B| = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$

VECTOR EN 3 DIMENSIONES



$\vec{A} = (a;\ b;\ c)$

$\vec{A} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

Donde: $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$ son vectores unitarios

Módulo del vector: $A = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Cosenos directores: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\theta = 1$

Ejemplo: Si: $\vec{A}=(3;2;7)$ y $\vec{B}=(1;1;5)$
Calcular: $|\vec{A}+\vec{B}|$ y $|\vec{A}-\vec{B}|$
$\vec{A}+\vec{B}=(3+1;2+1;7+5)=(4;3;12)$

$$|\vec{A}+\vec{B}|=\sqrt{4^2+3^2+12^2}=13$$

$\vec{A}-\vec{B}=(3-1;2-1;7-5)=(2;1;2)$

$$|\vec{A}-\vec{B}|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3$$

PRODUCTO ESCALAR:

$\vec{A}\cdot\vec{B} = A\,B\cos\theta =$ Número

Donde: θ es el ángulo que forman los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

Si: $A = (a; b; c)$ y $B = (d; e; f;)$

$\vec{A}\bullet\vec{B} = ad + be + cf$

Ejemplo: Si: $A = (1; 2; 3)$ y $B = (-4; -5; 6)$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = (1)(-4)+(2)(-5)+(3)(6) = +4$

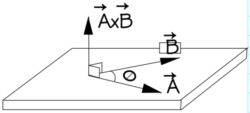
PRODUCTO VECTORIAL:

$\vec{A}\times\vec{B} =$ Vector

Módulo del producto vectorial: $|\vec{A}\times\vec{B}|=AB\,\text{sen}\theta$

Donde: θ es el ángulo que forman los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$
Si: $A = (a; b; c)$ y $B = (d; e; f;)$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}$$



$\vec{A}\times\vec{B}= (bf-ec)\vec{i} - (af-dc)\vec{j} + (ae-db)\vec{k}$

Ejemplo: Calcular: $|\vec{A}\times\vec{B}|$, si: $\vec{A}=(6;4;3)$ y $\vec{B}=(5;1;2)$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & 4 & 3\\ 5 & 1 & 2\end{vmatrix}=(4\cdot2-1\cdot3)\vec{i}-(6\cdot2-5\cdot3)\vec{j}+(6\cdot1-5\cdot4)\vec{k}$$

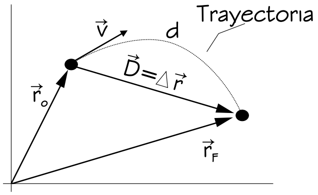
$\vec{A}\times\vec{B}=5\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}$

$$|\vec{A}\times\vec{B}|=\sqrt{5^2+3^2+3^2} \rightarrow |\vec{A}\times\vec{B}|=\sqrt{43}$$

CINEMÁTICA

Sistema de referencia.- Es el punto que se supone fijo y desde donde un observador analiza los fenómenos físicos.

Movimiento.- Se dice que un cuerpo está en movimiento cuando su posición cambia respecto a un sistema de referencia.

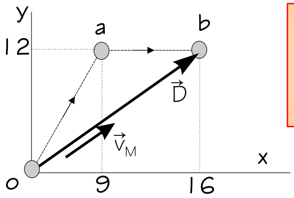


d = distancia recorrida
$\vec{D}$ = desplazamiento
$\vec{r}_o$ = posición inicial
$\vec{r}_F$ = posición final
$\Delta\vec{r}$ = cambio de posición

Velocidad media: $\vec{v}_M=\dfrac{\vec{D}}{t}=\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

Rapidez promedio: $v_P=\dfrac{d}{t}$

Ejemplo: Calcular la velocidad media y la rapidez promedio (rapidez media) del móvil que se desplaza siguiendo la trayectoria mostrada (oab), si se sabe que empleó 20 s.



La velocidad media tiene la misma dirección que el desplazamiento.

Distancia recorrida: d=oa + ab

La distancia oa es igual a: oa= $9^2+12^2=15$ m

La distancia ab es: ab=16-9=7 m

La distancia total es: d=15+7= 22 m

$$v_P=\frac{d}{t}=\frac{22\ \text{m}}{20\ \text{s}}=1{,}1\ \text{m/s}$$

El desplazamiento es: $\vec{ob}=(16;12)=16\vec{i}+12\vec{j}$

La velocidad media es: $\vec{v}_M=\dfrac{16\vec{i}+12\vec{j}}{20}$

$\vec{v}_M=0{,}8\vec{i}+0{,}6\vec{j}$ (m/s)

El módulo de la velocidad media es: $v_M=\sqrt{0{,}8^2+0{,}6^2}$

Efectuando la operación: $v_M=1$ m/s

VELOCIDAD INSTANTÁNEA

Es la velocidad del móvil, en un determinado instante. Su dirección siempre es tangente a la trayectoria. Matemáticamente se le expresa de la siguiente manera:

Velocidad instantánea: $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\,\vec{r}}{d\,t}$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\,\vec{r}}{d\,t} = \text{derivada de "r" respecto de "t"}}$$

Si la posición "r" se expresa en función del tiempo "t", y tiene la forma algebraica: $r = at^n$

La derivada de la posición "r" es:

$$\boxed{\frac{d\,r}{d\,t} = an\,t^{\,n-1}}$$

Ejemplo: Si un móvil se mueve de acuerdo a la ecuación:

$$r = 3t + 6t^2$$

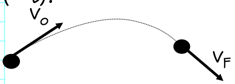
Donde "r" se expresa en metros (m) y "t" en segundos (s), calcular su velocidad en el instante: t=2 s.

$$v = \frac{d}{dt}(3t + 6t^2) \rightarrow v = 3 + 12t$$

En el instante: t= 2 s: $v = 3 + 12(2) \rightarrow v = 27$ m/s

ACELERACIÓN MEDIA ($\vec{a}_M$)

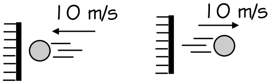
Es una magnitud vectorial que expresa la variación que experimenta la velocidad (Δv)en un intervalo de tiempo (Δt).



$$\boxed{\vec{a}_M = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_F - \vec{v}_o}{t}}$$

Δ

Ejemplo: La pelota de la figura, al chocar con la pared, tarda 0,1 s en cambiar su dirección. Calcular su aceleración media.



$$\vec{a}_M = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_F - \vec{v}_o}{t} = \frac{+10-(-10)}{0,1}$$

$$\vec{a}_M = +\,200 \text{ m/s}^2$$

El signo (+) indica que el vector que representa a la aceleración media está dirigido hacia la derecha.

ACELERACIÓN INSTANTÁNEA (a)

Es una magnitud vectorial que expresa la aceleración de un móvil en un determinado instante.
Matemáticamente se le expresa como la derivada de la velocidad respecto del tiempo:

$$\boxed{\vec{a}=\frac{d\,\vec{v}}{d\,t}}$$

Ejemplo: Un móvil se desplaza según la ecuación:

$$r=2t^3+4t^2-t+1$$

Donde: "r" se expresa en metros y "t" en segundos.
Calcular su velocidad y aceleración en el instante t=2 s

$$v=\frac{d\,r}{d\,t}\rightarrow v=6t^2+8t-1$$

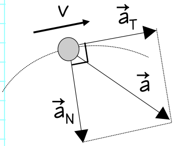
Cuando t = 2 s: $v=6(2)^2+8(2)=40$ m/s

$$a=\frac{d\,v}{d\,t}\rightarrow a=\frac{d}{dt}(6t^2+8t-1)\rightarrow a=12t+8$$

Cuando t = 2 s: $a=12(2)+8=32$ m/s^2

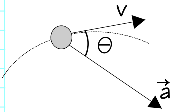
ACELERACIÓN TANGENCIAL Y ACELERACIÓN NORMAL

La aceleración instantánea está compuesta por una componente tangencial (aceleración tangencial) y una componente normal (aceleración normal) perpendicular a la tangente.

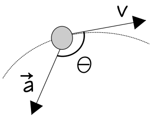


$$\boxed{a=\sqrt{a_T^{\,2}+a_N^{\,2}}}$$

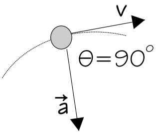
a_T: aceleración tangencial
a_N: aceleración normal



Cuando: $\theta<90^\circ$
El movimiento es acelerado.
La aceleración tiene una componente con igual sentido que la velocidad



Cuando: $\theta>90^\circ$
El movimiento es desacelerado.
La aceleración tiene una componente con sentido opuesto a la velocidad.

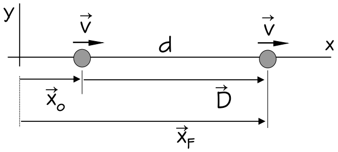


Cuando: $\theta=90^\circ$
El móvil se mueve con rapidez constante.

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

* La trayectoria es una línea recta.
* El móvil recorre distancias iguales en tiempos iguales.
* La velocidad permanece constante.

$$\boxed{\text{velocidad} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo}}} \qquad \boxed{v = \frac{d}{t}}$$



Ecuación del movimiento: $\vec{x}_F = \vec{x}_o + \vec{v}\,t$

Donde: $\vec{v}$=velocidad constante

Ejemplo: Un móvil inicia su movimiento en la posición x_o=-30 km, con una velocidad constante de 35 km/h.
¿Cuál es su posición al cabo de 2 horas?

Datos: xo=-30 km; v=35 km/h; t= 2 h

Usamos: $x_F = x_o + vt$

Reemplazamos datos: $x_F = -30 + 35\cdot 2$

Efectuando la operaciones: $x_F = +40$ km

A las 2 horas, el móvil se encuentra en el kilómetro 40.

¿Cómo convertir km/h a m/s?

Si la velocidad de un móvil es: $v = 72\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

$$v = 72 \times \frac{1\ 000\ \text{m}}{3\ 600\ \text{s}} \longrightarrow v = 72 \times \frac{5}{18} \longrightarrow v = 20 \text{ m/s}$$

¿Cómo convertir m/s a km/h?

Si la velocidad de un móvil es: $v = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

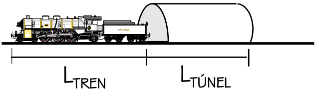
Recuerda: 1 km=1 000 m ; 1 h=3 600 s

$$v = 20\,\frac{\cancel{\text{m}}}{\cancel{\text{s}}} \times \frac{1\ \text{km}}{1\ 000\ \cancel{\text{m}}} \times \frac{3\ 600\ \cancel{\text{s}}}{1\ \text{h}}$$

$$v = 20 \times \frac{18}{5}\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \longrightarrow v = 72 \text{ km/h}$$

¿Cuánto tarda un tren en cruzar un túnel?

$$t=\frac{L_{TREN}+L_{TÚNEL}}{v_{TREN}}$$



Ejemplo: ¿Con qué velocidad debe correr un tren de 120 m de largo para cruzar un túnel de 180 m de longitud, en 20 s?

Datos: L_{TREN}= 120 m; $L_{TÚNEL}$= 180 m; t= 20 s

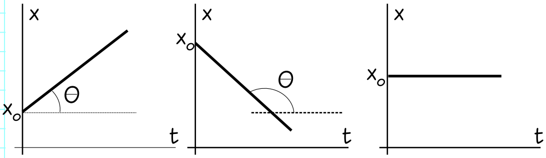
Usemos la ecuación: $L_{TREN}+L_{TÚNEL}=v_{TREN}\cdot t$

Reemplazamos datos: $120+180=v_{TREN}\cdot 20$

Efectuando la operación: v_{TREN}= 15 m/s

GRÁFICAS DEL M.R.U.

Gráfica posición (x) -vs- tiempo (t)

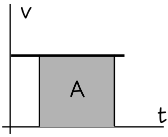


$v = Tg\theta$ — El móvil se dirige a la derecha

$v = Tg\theta$ — El móvil se dirige a la izquierda

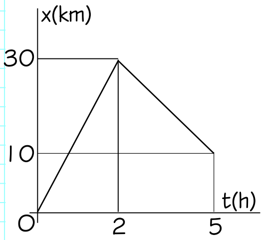
$v = 0$ — No hay movimiento

Gráfica velocidad (v) -vs- tiempo (t)



Área sombreada = Desplazamiento

Ejemplo: De la gráfica posición -vs- tiempo. Calcular la distancia recorrida y el desplazamiento del móvil en las primeras 5 horas.



En las primeras 2 h, recorrió 30 km y en las siguientes 3 h (de 2 a 5) recorrió 20 km (del 30 al 10)

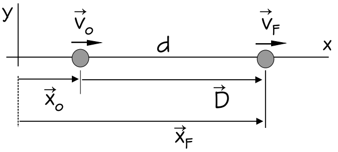
d=30+20=50km

El móvil inició en el kilómetro cero (0) y a las 5 horas, llegó al kilómetro 10.

D= 10 km

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO

* La trayectoria es una línea recta.
* La variación de la velocidad es igual en intervalos de tiempo iguales.
* La aceleración permanece constante.



El movimiento es acelerado cuando la velocidad y la aceleración tienen igual sentido.

Ejemplo: $v = -2\ \vec{i}$ m/y $a = -3\ \vec{i}$ m/s^2

Tanto la velocidad como la aceleración tienen igual sentido (hacia la izquierda)

El movimiento es desacelerado cuando la velocidad y la aceleración tienen sentidos opuestos.

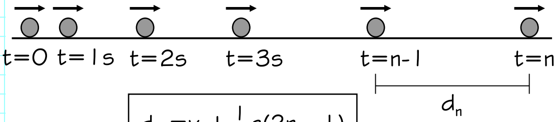
Ejemplo: $v = -2\ \vec{i}$ m/s y $a = +3\ \vec{i}$ m/s^2

La velocidad (hacia la izquierda) tiene sentido opuesto a la aceleración (hacia la derecha)

Ecuaciones escalares	
$d = v_o t \pm \frac{1}{2}at^2$ $v_F = v_o \pm at$ $v_F^2 = v_o^2 \pm 2ad$	Cuando el movimiento es acelerado, usar el signo (+) Cuando el movimiento es desacelerado, usar el signo (-)

Ecuaciones vectoriales	
$\vec{x}_F = \vec{x}_o + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}\, t^2$ $\vec{v}_F = \vec{v}_o + \vec{a}\, t$ $v_F^2 = v_o^2 + 2\,\vec{a}\,\vec{D}$	$\vec{x}_F$: posición final $\vec{x}_o$: posición inicial $\vec{v}_o$: velocidad inicial $\vec{v}_F$: velocidad final $\vec{a}$: aceleración

Distancia recorrida durante el n - ésimo segundo (d_n)



$$\boxed{d_n = v_o + \frac{1}{2}a(2n-1)}$$

Ejemplo: Un móvil parte del reposo con una aceleración de 2 m/s^2. Calcular:

a) La distancia recorrida en los 3 primeros segundos.

b) La distancia recorrida durante el tercer segundo.

Resolución:

a) Datos: $v_o=0$; $a=2m/s^2$; $t= 3$ s

Usamos la ecuación: $d=v_ot + \frac{1}{2}at^2$

Reemplazamos datos: $d=0+\frac{1}{2}(2)(3)^2 \rightarrow d=9$ m

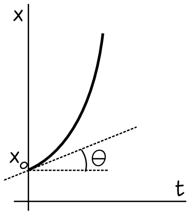
b) Para el tercer segundo: n = 3

Usamos la ecuación: $d_n=v_o+ \quad a(2n-1)$

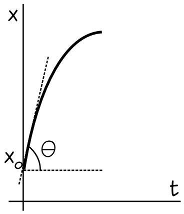
Reemplazamos: $d_3=0+\frac{1}{2}(2)(2x3-1) \rightarrow d_3=5$ m

GRÁFICAS DEL M.R.U.V.

Posición (x) -vs- tiempo (t)

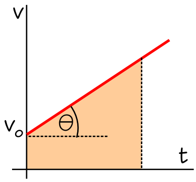


MOV. ACELERADO
x_o =posición inicial
Tgθ=velocidad inicial

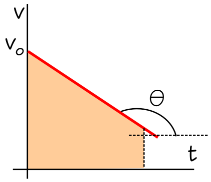


MOV. DESACELERADO
x_o =posición inicial
Tgθ=velocidad inicial

Velocidad (x) -vs- tiempo (t)



MOV. ACELERADO
v_o = velocidad inicial
Tgθ = aceleración
Área = desplazamiento

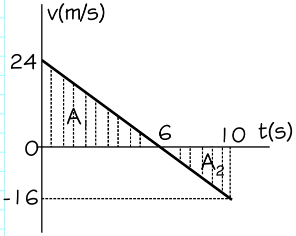


MOV. DESACELERADO
v_o = velocidad inicial
Tgθ = aceleración
Área = desplazamiento

Ejemplo: Del siguiente gráfico, determinar:

a) La distancia recorrida y el desplazamiento durante el intervalo: $t= 0$ y $t= 10$ s

b) La posición del móvil en el instante $t=10$ s, si el movimiento se inició en la posición: $x_o= -25$ m



Distancia recorrida:

$d = A_1 + A_2$

$$d = \frac{6x24}{2} + \frac{4x16}{2}$$

$d = 72 + 32$

$d = 104$ m

Desplazamiento: $D = A_1 - A_2$

$$D = \frac{6x24}{2} - \frac{4x16}{2} = 72 - 32 \rightarrow D= 40 \text{ m}$$

b) La posición de un móvil se determina con la ecuación:

$x_F=x_o + D$

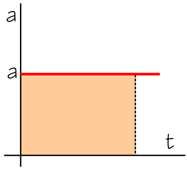
Donde: $x_o= -25$ m

Reemplazando datos: $x_F=-25+40 \rightarrow x_F=+15$ m

Durante los 6 primeros segundos, el movimiento es desacelerado y hacia la derecha.

Entre 6 s y 10 s, el movimiento es acelerado y hacia la izquierda.

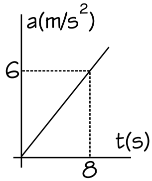
Aceleración(a) -vs- tiempo (t)



El área bajo la recta horizontal indica la variación de velocidad

$$\boxed{\text{Área} = \vec{v}_F - \vec{v}_o}$$

Un móvil inicia su movimiento con una velocidad de $v=+12$ m/s y con una aceleración variable como se indica en la gráfica. Calcular su velocidad en el instante: $t= 8$ s



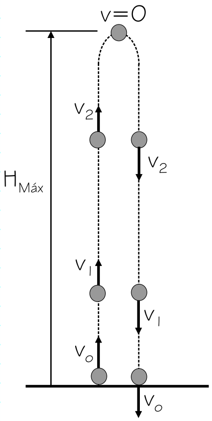
$\text{Área} = v_F - v_o$

$$\frac{8x6}{2} = v_F-12$$

$v_F=36$ m/s

MOVIMIENTO VERTICAL DE CAÍDA LIBRE

Caída libre es aquel movimiento en el cual solamente actúa la fuerza de la gravedad. En las cercanías de la superficie terrestre, el valor de la aceleración de la gravedad es aproximadamente a 9,8 m/s^2



CONSIDERACIONES:

1) En todo punto de la trayectoria, se cumple que el valor de la velocidad de subida es igual que cuando baja.
2) En todo tramo de la trayectoria, se cumple que el tiempo que tarda en subir es igual al tiempo que tarda en bajar.
3) En el punto más alto de la trayectoria, su velocidad es cero, pero su aceleración es igual a la aceleración de la gravedad.

Ecuaciones escalares	
$h=v_ot\pm\frac{1}{2}gt^2$ $v_F= v_o\pm gt$ $v_F^2 = v_o^2\pm 2gh$	Cuando el cuerpo baja, usar el signo (+) Cuando el cuerpo sube, usar el signo (-) $g=9,8\ m/s^2$

La máxima altura alcanzada:	Tiempo que tarda en alcanzar la $H_{máx}$:	Tiempo de vuelo:
$H_{máx}=\frac{v_o^2}{2g}$	$t=\frac{v_o}{g}$	$t=\frac{2v_o}{g}$

Ejemplo: Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 40 m/s. Calcular la velocidad de la piedra al cabo de 3 s.

Considere: $g= 10\ m/s^2$.

Datos: $v_o=40$ m/s; t= 3 s

Usemos la ecuación: $v_F=v_o-gt$

Se usa el signo (-) porque el cuerpo sube.

Reemplazando datos: $v_F=40-(10)(3) \rightarrow v_F= 10$ m/s

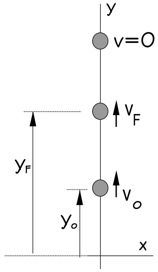
Ecuaciones vectoriales

Para utilizar las ecuaciones vectoriales, se debe tener en cuenta la convención de signos.
(+) cuando el vector es hacia arriba
(-) cuando el vector es hacia abajo

$$\vec{y}_F = \vec{y}_o + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2$$

$$\vec{v}_F = \vec{v}_o + \vec{g}\,t$$

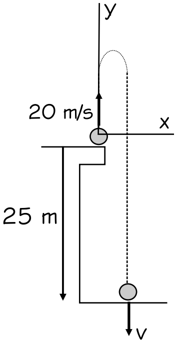
$\vec{y}_F$: posición final
$\vec{y}_o$: posición inicial
$\vec{v}_o$: velocidad inicial
$\vec{v}_F$: velocidad final
$\vec{g} = -9{,}8\ m/s^2$



Ejemplo: La esfera es lanzada con 20 m/s. Calcular:
a. El tiempo que tarda en llegar al piso
b. El valor de la velocidad con que llega al piso.
Considere: $g = 10\ m/s^2$

a) Usemos la ecuación:

$$y_F = y_o + v_o t + \frac{1}{2} g\, t^2$$



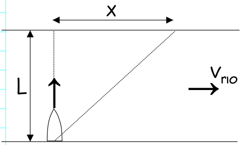
Al trazar el sistema de coordenadas, de manera que el origen coincida con el punto de lanzamiento, se tiene que:
posición inicial: $y_o = 0$
posición final: $y_F = -25$ m (el signo indica que está debajo del origen)
velocidad inicial: $v_o = +20$ m/s (velocidad hacia arriba)
Reemplazando datos: $-25 = 0 + 20t + \frac{1}{2}(-10)\,t^2$

Luego: $5t^2 - 20t - 25 = 0 \rightarrow t = 5\ s$

b) Usemos la ecuación: $v_F = v_o + g\,t$

Reemplazando datos: $-v = +20 + (-10)(5)$
Finalmente: $v = 30\ m/s$

MOVIMIENTO COMPUESTO



Tiempo que tarda el bote en cruzar el río:

$$t = \frac{L}{v_{bote}}$$

Distancia arrastrada por el río: $x = v_{río}\, t$

Ejemplo: Un bote que puede avanzar a razón de 6 km/h respecto al río, intenta cruzarlo perpendicularmente a la corriente. Si el ancho del río es de 12 km y la velocidad de la corriente es de 3km/h, ¿qué distancia es arrastrado el bote por la corriente?

El tiempo que el bote emplea en cruzar el río es:

$$t = \frac{12\text{ km}}{6\text{ km/h}} = 2\text{ h}$$

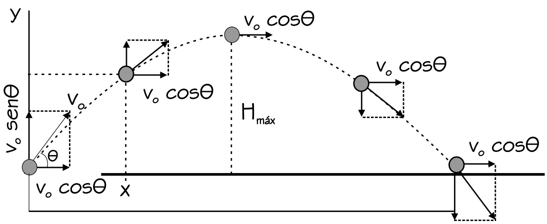
La distancia (x)que el bote es arrastrado es:

$x = v_{río} \cdot t = 3 \cdot 2 \;\rightarrow\; x = 6$ km

MOVIMIENTO PARABÓLICO

Es un movimiento compuesto por un movimiento horizontal uniforme y un movimiento vertical de caída libre.

Es un movimiento de caída libre, por lo tanto es un movimiento de aceleración constante, donde su valor es el de la aceleración de la gravedad (g).



L : alcance horizontal

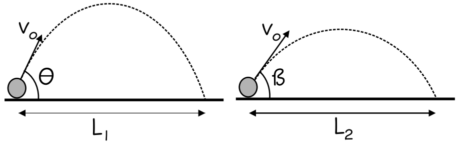
$$H_{máx} = \frac{v_o^2\, sen^2\theta}{2g} \qquad t_{vuelo} = \frac{2\, v_o\, sen\theta}{g} \qquad L = \frac{v_o^2\, sen\, 2\theta}{g}$$

Ecuación de la trayectoria: $y = x\, Tg\theta \left(1 - \frac{x}{L}\right)$

El máximo alcance horizontal, se logra cuando el ángulo de lanzamiento es: $\theta=45^\circ$

$$L_{Máx}=\frac{v_o^2}{g}$$

Cuando los ángulos de lanzamiento suman 90° (son complementarios) y el valor de las velocidades iniciales son iguales, los alcances horizontales son iguales.

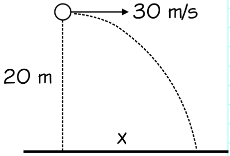


Si: $\theta+\beta=90^\circ \rightarrow L_1 = L_2$

Ejemplo: Desde una altura de 20 m, se lanza horizontalmente una esfera con una velocidad de 30 m/s. Calcular:

a) El tiempo que tarda en llegar al piso.
b) La distancia horizontal "x"
c) La velocidad de la esfera, al llegar al piso.

a) Usamos la ecuación:



$$h=v_o t \pm \frac{1}{2}gt^2$$

Datos: $h= 20$ m; $g= 10$ m/s^2
La velocidad inicial horizontal es cero.

Reemplazando datos: $20=0+\frac{1}{2}(10)t^2$

Resolviendo la ecuación: $t= 2$ s

b) La distancia horizontal es: $x= v\cdot t$

Reemplazando: $x=(30\text{ m/s})\cdot(2\text{ s}) \rightarrow x= 60$ m

c) La velocidad de la esfera al llegar al piso, tiene dos componentes. La componente horizontal que es la misma en todo el movimiento; es decir: $v_x=30$m/s
la componente vertical (v_y) se determina con la ecuación de caía libre: $v_F=v_o+gt$

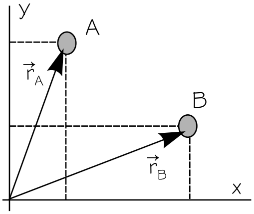
$v_y=0+(10)(2) \rightarrow v_y=20$ m/s
La velocidad final es: $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{30^2+20^2}$
Efectuando la operación: $v= 10\sqrt{13}$ m/s

MOVIMIENTO RELATIVO

POSICIÓN RELATIVA:

La posición de A, respecto de B está dada por:

$$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$$



Ejemplo: Dos móviles A y B se encuentran en los puntos (5; 8) y (3; 1) respectivamente. ¿Cuál es la posición del móvil A respecto de B?

Datos: $\vec{r}_A = (5;8)$; $\vec{r}_B = (3;1)$

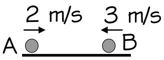
$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = (5;8) - (3;1) \rightarrow \vec{r}_{A/B} = (2;7)$

VELOCIDAD RELATIVA

la velocidad del móvil A respecto del móvil B es:

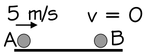
$$\boxed{\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B}$$

Ejemplo: calcular la velocidad del móvil A respecto de B.



$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = (+2) - (-3) \rightarrow v_{A/B} = +5$ m/s

Al calcular la velocidad de A respecto de B, éste último es considerado en reposo, y se puede analizar como se muestra en la figura:

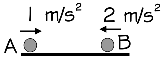


ACELERACIÓN RELATIVA

La aceleración del móvil A respecto del móvil B, es:

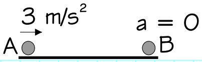
$$\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$$

Ejemplo: Calcular la aceleración de A respecto de B.



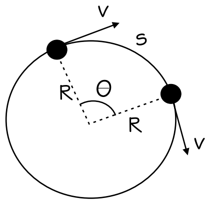
$\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B = (+1) - (-2) \rightarrow a_{A/B} = +3$ m/s^2

Al calcular la aceleración de A respecto de B, se está asumiendo que la aceleración de B es cero.



MOVIMIENTO CIRCULAR

Desplazamiento lineal (s): s el arco de circunferencia. Se expresa en unidades de longitud. ($s = \theta R$)



Desplazamiento angular (θ): Es el ángulo central. Se expresa en radianes (rad)

Periodo (T): Es el tiempo que tarda en dar una vuelta o revolución completa.

Frecuencia (f): Es el número de vueltas o revoluciones por unidad de tiempo. Se expresa en hertz (Hz)

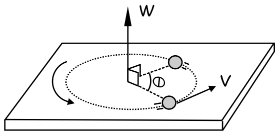
La frecuencia, es la inversa del periodo: $\boxed{f = \frac{1}{T}}$

$$1\ Hz = \frac{1}{s} = s^{-1} = \frac{\text{vueltas}}{\text{segundo}} = \frac{\text{revoluciones}}{\text{segundo}} = rps$$

¿Cómo convertir rpm a rps?

Si se tiene: f= 120 rpm

$$f = 120\ rpm = 120\frac{rev}{\cancel{min}} \times \frac{\cancel{min}}{60\ s} = \frac{120}{60} rps = 2\ rps$$



Velocidad tangencial: $v_T = \frac{s}{t} = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R f$

Velocidad angular: $w = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

Relación entre la velocidad tangencial y la velocidad angular: $\boxed{v = w\ R}$

Ejemplo: Una partícula gira con una velocidad angular de 5π rad/s en una trayectoria circular de radio 2 m. calcular el valor de su velocidad tangencial.

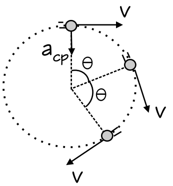
Como: $v = w\,R$

Entonces: $v = (5\pi\ rad/s)(2\ m) \rightarrow v = 10\pi\ m/s$

También: $v = (10)(3,14) \rightarrow v = 31,4\ m/s$

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

* La velocidad angular es constante.
* El módulo (magnitud) de la velocidad tangencial es constante.
* La velocidad tangencial varía (su dirección cambia permanentemente)
* Tiene aceleración centrípeta (a_{cp})

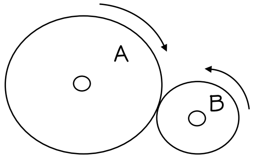
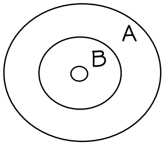


$$\boxed{a_{cp} = \frac{v^2}{R} = w^2R}$$

Ejemplo: Una partícula gira con una frecuencia de 4 rps, en una trayectoria circular de radio 2 m. Calcular su aceleración centrípeta.

$w = 2\pi f = 2\pi(4) = 8\pi$ rad/s

$a_{cp} = w^2R = (8\pi)^2\,(2) \longrightarrow \quad a_{cp} = 128\pi^2$ m/s^2

Ruedas tangentes	Ruedas concentrícas
	
La velocidad tangencial de las ruedas tienen igual valor: $v_A = v_B$ $w_A\,R_A = w_B\,R_B$	La velocidad angular de las ruedas son iguales: $w_A = w_B$

Ejemplo: Si la rueda A gira con una velocidad angular de 4π rad/s, ¿con qué velocidad angular gira la rueda B? Considere: R= 3r

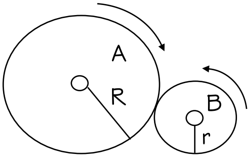
Como las ruedas son concéntricas se cumple que: $v_A = v_B$

$w_A\,R_A = w_B\,R_B$

$(4\pi)\,R = (w_B)\,r$

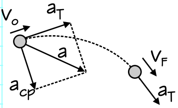
$(4\pi)\,3r = (w_B)\,r$

$w_B = 12\pi$ rad/s

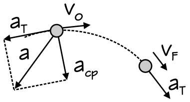


MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE VARIADO

Aceleración tangencial (a_T): Se origina por el cambio que experimenta el módulo (magnitud) de la velocidad tangencial.



Movimiento acelerado

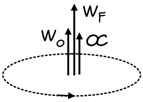


Movimiento desacelerado

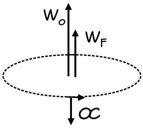
$$\boxed{a_T = \frac{v_F - v_o}{t}}$$

La aceleración (a) es: $\boxed{a = \sqrt{a_{cp} + a_T}}$

Aceleración angular (α): Se origina por el cambio que experimenta el módulo (magnitud) de la velocidad angular. Se expresa en rad/s^2



Movimiento acelerado



Movimiento desacelerado

$$\boxed{\alpha = \frac{w_F - w_o}{t}}$$

Ecuaciones lineales	Ecuaciones angulares
$s = v_o t \pm \frac{1}{2} at^2$	$\theta = w_o t \pm \frac{1}{2} \alpha t^2$
$v_F = v_o \pm at$	$w_F = w_o \pm \alpha t$
$v_F^2 = v_o^2 \pm 2as$	$w_F^2 = w_o^2 \pm 2\alpha\theta$

Cuando el movimiento es acelerado, usar (+)
Cuando el movimiento es desacelerado, usar (-)

Ejemplo: Una partícula inicia su movimiento circular con una aceleración angular constante de 2π rad/s^2. Calcular el número de vueltas que da durante los primeros 3 segundos.

Usamos la ecuación: $\theta = w_o t + \frac{1}{2} \alpha t^2$

Reemplazando datos: $\theta = 0 + \frac{1}{2} 2\pi (3)^2 = 9\pi$ rad

Recuerda que: 1 vuelta < > 2π rad
Entonces: 9π rad < > 4,5 vueltas

$$\text{Nùmero de vueltas} = \frac{\text{Ángulo girado}}{2\pi}$$

Ejemplo: Una partícula parte del reposo con una aceleración tangencial de 2 m/s^2, en una trayectoria de 1 m de radio. Calcular su aceleración al cabo de un segundo.

Al cabo de 1 s, la velocidad tangencial de la partícula es. $v_F=v_o+a_T\,t$

Si parte del reposo: $v_o=0$; $a_T=2m/s^2$; $t=1$ s

Luego: $v=0+2\cdot 1=2$ m/s

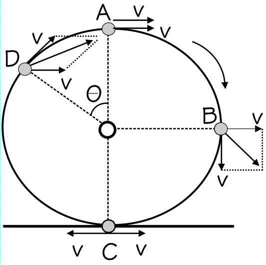
Su aceleración centrípeta es: $a_{cp}=\dfrac{v^2}{R}$

Luego: $a_{cp}=\dfrac{2^2}{1}=4$ m/s^2

La aceleración es igual a: $a=\sqrt{a_{cp}^{\,2}+a_T^{\,2}}$

Reemplazando: $a=\sqrt{4^2+2^2} \rightarrow a=2\sqrt{5}$ m/s^2

MOVIMIENTO DE ROTACIÓN Y DE TRASLACIÓN



En una rueda, la velocidad tangencial "v" (de rotación) y la de traslación "v" tienen igual módulo (magnitud)

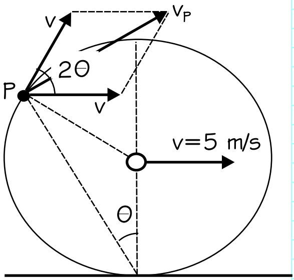
$v_A = 2v$

$v_B = v\sqrt{2}$

$v_C = 0$

$v_D = 2v\,\text{Cos}\,\theta/2$

Ejemplo: Si el centro de una rueda se desplaza con una velocidad de 5 m/s. calcular la velocidad del punto "P". $\theta=30^\circ$



El punto P, tiene dos velocidades, que forman 60° entre sí.

$$v_P=\sqrt{5^2+5^2+2\cdot 5\cdot 5\cdot \text{Cos}60^\circ} \rightarrow v_P=5\sqrt{3}\text{ m/s}$$